

**INTRODUCTION TO SPECIAL RELATIVITY  
TEST 1**

Wednesday Sep 27 11:00 - 12:00

Name: (5pts)

Collegekaartno (5pts):

**Explain your steps carefully.**

**You may use  $c = 3 \cdot 10^8 m/s$  everywhere.**

• **Problem 1: Time dilation and Length contraction (20pts)**

You may use both a calculator and/or the approximation  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$  for  $x \ll 1$ .

- a. (5pts) GPS satellites orbit the Earth at a speed of approx.  $14.4 \cdot 10^3$  km/h. Assume that the GPS satellite is different inertial frame than the inertial frame of Earth. How long does an observer on Earth think that one second on the clock aboard the GPS satellite lasts? What is thus the difference between the clocks after 1 GPS second in nanoseconds?
- b. (5pts) How long does an observer on Earth think that one day on the clock aboard the GPS satellite lasts? What is thus the difference between the clocks after one GPS day in microseconds?
- c. (5pts) The assumption that the GPS satellite in orbit is an inertial frame is of course incorrect. Why? Think of the definition of an inertial frame.
- d. (5pts) The closest star, Alpha Centauri, is 4.37 lightyears away as measured from Earth. How fast must a spacecraft travel for it to measure this distance to be equal to 4.37 lightmonths? A lightmonth is  $1/12$  lightyear.

---

Je mag zowel een rekenmachine als de benadering  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$  voor  $x \ll 1$  gebruiken.

- a. GPS satellieten draaien om de aarde met een snelheid van ong.  $14.4 \cdot 10^3$  km/h. Neem aan dat de GPS satelliet in een verschillend inertiaalstelsel is dan het inertiaalstelsel van de Aarde. Hoe lang denkt een waarnemer op Aarde dat een seconde op de klok aan boord van de GPS satelliet duurt? Wat is dan het verschil tussen de klokken na één GPS seconde in nanosecondes?
- b. Hoe lang denkt een waarnemer op Aarde dat een dag op de klok aan boord van de GPS satelliet duurt? Wat is dan het verschil tussen de klokken na één GPS dag in microsecondes?
- c. De aanname dat de GPS satelliet in een baan om de aarde zich in een inertiaalstelsel bevindt, is natuurlijk niet juist. Waarom? Denk hierbij aan de definitie van een inertiaalstelsel.
- d. De dichtstbijzijnde ster, Alpha Centauri, is 4.37 lichtjaren ver weg zoals gemeten van de Aarde. Hoe snel moet een ruimteschip reizen ten opzichte van de aarde zodat hij deze afstand als 4.37 lichtmaanden meet? Een lichtmaand is  $1/12$  lichtjaar.

---

• **Problem 2: Doppler Effect and Velocity addition (15pts)**

- a. A spacecraft receding from the earth at a speed equal to  $0.97c$  transmits data at the rate of  $1.00 \cdot 10^4$  pulses/s.  
At what rate are they received?
- b. Something goes wrong. A second special spacecraft is launched to catch up with the first. It is able to travel at  $v = 0.9997c$ . What is the relative speed at which it catches up? (i.e. the relative speed between the first and the second spacecraft.)?
- c. What is the rate at which the second spacecraft receives the data?

- 
- a. Een ruimteschip reist van de aarde weg met een snelheid van  $0.97c$ . Hij zendt data uit met een frequentie van  $1.00 \cdot 10^4$  radio pulsen per seconde.

Met welke frequentie worden deze ontvangen?

- b. Er gaat iets fout. Een tweede speciaal ruimteschip wordt gelanceerd om het in te halen. Dit ruimteschip is in staat met  $v = 0.9997c$  te reizen. Wat is de relatieve snelheid waarmee het het eerste ruimteschip inhaalt (i.e. wat is de relatieve snelheid tussen het eerste en het tweede ruimteschip)?
- c. Wat is de frequentie waarmee het tweede ruimteschip de radio pulsen ontvangt?
- 

• **Problem 3: Lorentz transformations: The Garage paradox (40pts)**

A car of length  $5m$  is traveling at  $0.8c$  towards a garage with length  $3.125m$  and open at both ends. To an observer at rest with respect to the garage the car just seems to “fit” due to length contraction. However, to the car the garage appears to be only  $1.875m$  long and it doesn’t even come close to fitting.

- a. (5pts) Confirm that the length of the car as seen by the garage-observer is such that the car “fits”.
- b. (5pts) Confirm that the garage appears to be  $1.875m$  long to the car-driver.
- c. (10pts) Write down the relation between position  $x_g$  and time  $t_g$  for the front of the car as seen by an observer at rest with respect to the **garage**. Do the same for the rear of the car. In attached graph, draw a spacetime diagrams from the viewpoint of the **garage**. In this diagram note the special point in space and time  $F_i$  where the front of the car enters the garage, the special point  $F_o$  when the front of the car exits the garage, the special point  $R_i$  where the rear enters the garage, and the special point  $R_o$  where the rear exits the garage. Draw the worldlines — i.e. the relation between position and time for both the front and the rear of the garage.
- d. (10pts). Write down the relation between position  $x_c$  and time  $t_c$  for the front of the car as seen by an observer at rest with respect to the **car**. Do the same for the rear of the car. In attached graph, draw a spacetime diagrams from the viewpoint of the **car**. In this diagram note the special point in space and time  $F_i$  where the front of the car enters the garage, the special point  $F_o$  when the front of the car exits the garage, the special point  $R_i$  where the rear enters the garage, and the special point  $R_o$  where the rear exits the garage. Draw the worldlines — i.e. the relation between position and time for both the front and the rear of the garage.
- e. (10pts) With the help of these diagrams, explain the paradox that to one of the observers the car fits whereas to the other it doesn’t. (Hint, think about simultaneity.)

---

Een auto met lengte  $5m$  rijdt met een snelheid van  $0.8c$  naar een garage met lengte  $3.125m$  en aan beide kanten open. Voor een waarnemer die niet ten opzichte van de garage beweegt lijkt de auto net in de garage te passen vanwege de relativistische lengte contractie. Echter, vanuit het oogpunt van de auto lijkt de garage maar  $1.875m$  lang en past hij dus helemaal niet.

- Bevestig dat de lengte van de auto vanuit het oogpunt van de garage-waarnemer zo is dat hij past.
  - Bevestig dat de garage er  $1.875m$  lang uitziet voor de bestuurder van de auto.
  - Schrijf de relatie op tussen de positie  $x_g$  en de tijd  $t_g$  voor de voorkant van de auto zoals waargenomen door een waarnemer die stilstaat ten opzichte van de garage. Doe hetzelfde voor de achterkant van de auto. In bijgesloten grafiek, teken een ruimtetijd diagram vanuit het oogpunt van de **garage**. Markeer in dit diagram het speciale punt in ruimte en tijd  $F_i$  waar de voorkant van de auto de garage inrijdt, het speciale punt  $F_o$  waar de voorkant de garage uitrijdt, het speciale punt  $R_i$  waar de achterkant van de auto de garage inrijdt, en het speciale punt  $R_o$  waar de achterkant van de auto de garage uitrijdt. Teken de wereldlijnen i.e. de relatie tussen positie en tijd voor zowel de voorkant als de achterkant van de garage.
  - Schrijf de relatie op tussen de positie  $x_c$  en de tijd  $t_c$  voor de voorkant van de auto zoals waargenomen door een waarnemer die stilstaat ten opzichte van de **auto**. Doe hetzelfde voor de achterkant van de auto. In bijgesloten grafiek, teken een ruimtetijd diagram vanuit het oogpunt van de **auto**. Markeer in dit diagram het speciale punt in ruimte en tijd  $F_i$  waar de voorkant van de auto de garage inrijdt, het speciale punt  $F_o$  waar de voorkant de garage uitrijdt, het speciale punt  $R_i$  waar de achterkant van de auto de garage inrijdt, en het speciale punt  $R_o$  waar de achterkant van de auto de garage uitrijdt. Teken de wereldlijnen i.e. de relatie tussen positie en tijd voor zowel de voorkant als de achterkant van de garage.
  - Verklaar met behulp van deze twee diagrammen de paradox dat een van de waarnemers denkt dat de auto past en de ander niet. (Hint, denk aan het begrip simultaan.)
- 

• **Problem 4: Relativistic Energy (15pts)**

Suppose you have a massive particle of mass  $m$  moving with a momentum  $p$ .

- (5pts) Write down the formula for the (kinetic) energy according to Newton. Recall that Newton thought the momentum equaled  $p = mv$ . What is thus its speed in terms of  $p$  and  $m$ ? Use this answer to rewrite the formula for the (kinetic) energy in terms of  $p$  and  $m$ .
- (5pts) According to special relativity, what is its energy in terms of  $p$  and  $m$ ? Write down the expression for the momentum in special relativity as a function of  $v$  and  $m$ . Rewrite this to find an expression for the speed in terms of  $p$  and  $m$  — that means solve this expression for  $v$ .

Suppose you have now a massless particle moving with a momentum  $p$ .

- (2.5pts) According to Newtonian physics, what is its speed and what is its (kinetic) energy (in terms of  $p$  and  $m$ )?
- (2.5pts) According to special relativity, what is its speed and what is its energy (in terms of  $p$  and  $m$ )?

---

Gegeven is een massief deeltje met massa  $m$  en het beweegt met een impuls  $p$ .

- Schrijf op de formule voor de (kinetische) energie volgens Newton. Herinner je dat Newton dacht dat de impuls gelijk was aan  $p = mv$ . Wat is dus de snelheid in termen van  $p$  and  $m$ . Gebruik dit antwoord om de formule voor de (kinetische) energie te herschrijven in termen van  $p$  and  $m$ .
- Volgens de Speciale relativiteitstheorie wat is in dat geval zijn energie (in terms of  $p$  and  $m$ ). Geef de uitdrukking voor de impuls in speciale relativiteitstheorie als een functie van  $v$  and  $m$ . Herschrijf deze tot een uitdrukking voor de snelheid in termen van  $p$  en  $m$  d.w.z. los de vergelijking van  $p$  op voor  $v$ .

Gegeven is nu een massaloos deeltje dat beweegt met een impuls  $p$ .

- Volgende Newtoniaans natuurkunde wat is zijn snelheid en wat is zijn (kinetische) energie (in terms of  $p$  and  $m$ )?
  - Volgens de Speciale relativiteitstheorie wat is zijn snelheid en wat is zijn (kinetische) energie (in terms of  $p$  and  $m$ )?
-

