Tentamen Introduction to Differentiable Manifolds 1

26 Januari 2018

Vraag 1 (De sigaar):
Stel je, gegeven $r \in \mathbb{R}$, het oppervlak $C = f^{-1}(\{1\})$ voor, waarbij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de formule $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + r^2z^2$ heeft.

a. Beschrijf expliciet de raakruimte C_p voor $p = (1, 0, 0) \in C$.

b. Geef een formule voor het naar buiten wijzende eenheidsnormaalvectorveld op C.

c. Is de kromme $\alpha : [0, 2\pi] \to C$ gegeven door $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ een geodeet?

d. Bereken het parallel transport van de vector $v = (p, (0, 1, 1)) \in C_p$ langs de kromme α uit deel c.

e. Schrijf de integraal $\int_H \omega$ als een integraal over ∂H waarbij $H = C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ en $\omega = dx \wedge dy + dx \wedge dz$ en bereken deze lijnintegraal. De oriëntatie op H is gegeven door het normaalveld uit deel b.

Vraag 2 (beetje krom):
Bewijs dat er geen S compact georiënteerd 2-oppervlak in $\mathbb{R}^3$ bestaat met de eigenschap dat voor alle $p \in S$ geldt: $0 < K(p) < \frac{2\pi}{V(S)}$. Hierbij is K de Gauss-kromming en V het volume van S.

Vraag 3 (Thorpe 17.7):
Stel $g : U \to \mathbb{R}$ is een gladde functie gedefinieerd op de open verzameling $U \subset \mathbb{R}^n$. Definieer $\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ door $\phi(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots u_n, g(u_1, \ldots, u_n))$. Laat zien dat $V(\phi) = \int_U (1 + \sum_i (\frac{\partial g}{\partial u_i})^2)^{\frac{1}{2}}$. Bereken $V(\phi)$ voor $n = 2$ en U de open eenheidsschijf en $g(u_1, u_2) = u_1 + u_2$.

Vraag 4:

a. Geef voor iedere $1 \leq k \in \mathbb{N}$, $1 < n \in \mathbb{N}$ een voorbeeld van een geparameteriseerd n-oppervlak in $\mathbb{R}^{n+k}$ waar de coördinaatvectorvelden op geen enkel punt een orthogonale basis vormen.

b. Staat de covariante afgeleide van een eenheidsvectorveld $\mathbf{X}$ op een n-oppervlak altijd loodrecht op $\mathbf{X}$?

c. Stel ω is de connectie 1-vorm die hoort bij een rakend eenheidsvectorveld $\mathbf{X}$ op een open verzameling U van een compact 2-oppervlak in $\mathbb{R}^3$. Gegeven een gladde kromme α in U zo dat $\mathbf{X}$ parallel is langs α, bereken $\int \omega(\dot{\alpha})$. z.o.z.

d. Op de eenheidscirkel $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ beschouwen we een volume 1-vorm η. Is η uniek? Bereken de pull-back $\phi^*\eta$ waarbij $\phi : S^1 \to S^1$ de rotatie over hoek $\frac{\pi}{3}$ is.