Tentamen algebra 1

Donderdag 23 juni 2016, 10:00 – 13:00

Snelliusgebouw 174 (extra tijd), B2, B3, 312 en 412

- Bij dit tentamen mag het dictaat "Algebra 1" van Peter Stevenhagen gebruikt worden, maar geen uitwerkingen van opgaven en geen rekenmachines of andere elektronische hulpmiddelen. Eventuele onderstrepingen, markering of korte hoorcollege-notities in het dictaat zijn geen probleem, zolang het geen (gedeeltes van) werkcollege-notities of uitwerkingen van opgaven of oude tentamens zijn.
- Je mag opgaven 2.46, 2.49, 4.10 en 8.13 gebruiken zonder ze op te lossen, en er geldt $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$.
- Alle opgaven zijn evenveel punten waard, niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.
- Benoem de resultaten die je gebruikt. Schrijf op het tentamen of je uit Leiden of Delft komt, en schrijf er het studentnummer van je eigen universiteit op.

Opgave 1. Bepaal het gehele getal $0 \leq x \leq 74$ zó dat

$$x \equiv 23^{6^{2016}} \mod 75.$$

Waarschuwing: $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z = x^{y \cdot z}$.

Opgave 2. Bepaal voor elk van de volgende drie situaties of de twee elementen geconjugeerd zijn in de gegeven groep.

(a) $(364)(567)(246)$ en $(456)(467)(253)$ in S_7;

(b) $(12)(34)$ en $(13)(24)$ in A_4;

(c) 3 en 7 in $\mathbf{R}^*$.

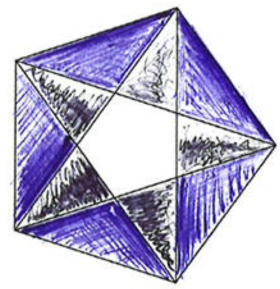
Opgave 3.

(a) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})$.

(b) Hoeveel van de homomorfismen in (a) zijn injectief?

(c) Bepaal $\#\mathrm{Hom}(D_{23}, C_6)$.

Opgave 4. De symmetriegroep D_5 van de regelmatige 5-hoek werkt op de verzameling verbindingslijnstukken van hoekpunten. We kleuren nu elk van deze lijnstukken, waarbij we 10 kleuren tot onze beschikking hebben. Dat kan dus op 10^{10} manieren, waarvan er vele equivalent zijn. Op hoeveel niet-equivalente manieren kan het?
(Twee kleuringen noemen we equivalent als een element van D_5 de ene in de andere overvoert.)



Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 5. Een werking van een groep G op een verzameling X heet *vrij* als voor alle $x \in X$ de stabilisator G_x triviaal is (dat wil zeggen, gelijk is aan de triviale ondergroep van G).

(a) Geef *zonder bewijs* voor elk van de volgende werkingen aan of deze

(A) transitief is,

(B) trouw is,

(C) dekpuntsvrij is,

(D) vrij is.

Er worden dus $4 \times 3 = 12$ antwoorden ("ja"/"nee") verwacht in een overzichtelijke tabel. Je zou ze allemaal moeten kunnen bewijzen, maar zo niet: gokken loont! Naar het bewijs wordt niet gekeken.

(i) De werking van D_4 op de verzameling hoekpunten van een vierkant.

(ii) De werking van de additieve groep $\mathbf{R}$ op het vlak $\mathbf{R}^2$ gegeven door $a \circ (x, y) = (a + x, y)$.

(iii) De werking van C_6 op de verzameling D van de drie diagonalen van een regelmatige zeshoek.

(b) Bewijs dat als een eindige groep G vrij en transitief op X werkt, dat dan geldt $\#G = \#X$.

Opgave 6. Zij p een priemgetal. Op een veld staan $2p$ kabouters verdeeld over twee kringen van p kabouters. We hebben ook p blauwe en p rode mutsen. Zij X de verzameling van de manieren waarop we deze mutsen over de kabouters kunnen verdelen. We laten $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ als volgt werken op X: het element $(a, b) \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ laat de kabouters in de linker kring hun muts a keer doorgeven met de klok mee, en laat de kabouters in de rechter kring hun muts b keer doorgeven met de klok mee.
Je mag zonder bewijs gebruiken dat dit een werking is.

(a) Bewijs dat er precies twee dekpunten zijn voor de werking van G op X.

(b) Laat zien dat alle andere banen precies lengte p^2 hebben.

(c) Bewijs $\#X = \binom{2p}{p} \equiv 2 \bmod p^2$.
Ter herinnering: $\binom{m}{n}$ is het aantal deelverzamelingen van n elementen binnen een verzameling van m elementen.

- Na afloop van het tentamen is er een evaluatielunch van de vakken van het Leidse tweede semester Wiskunde in zaal 176 van het Snelliusgebouw.
- Cijfers staan waarschijnlijk maandagavond 27 juni op de Leidse Blackboardpagina.