Uitwerking tentamen Algebra I, 9 juni 2004

Opgave 1

(a) $\sigma = (1\,7)(2\,3\,8\,6\,5\,9)$.

(b) De orde van σ is $\text{kgv}(2, 6) = 6$. Omdat 999 modulo 6 congruent is met 3, geldt dat $\sigma^{999} = \sigma^3$. De orde van σ^{999} is dus 2.

Opgave 2

Er bestaat een $g \in G$ zodat $ab = gb^{-1}a^{-1}g^{-1}$. Er geldt dus: $ab = gb^{-1}a^{-1}b^{-1}bg^{-1} = (gb^{-1})a^{-1}b^{-1}(gb^{-1})^{-1}$, dus ab is geconjugeerd met $a^{-1}b^{-1}$.

Opgave 3

De symmetriegroep is de C_6 (de rotatiesymmetrieën van de regelmatige zeshoek), voortgebracht door een rotatie ρ. Er geldt $\chi(1) = 2^7 - 2$, $\chi(\rho) = \chi(\rho^5) = 2^2 - 2$, $\chi(\rho^2) = \chi(\rho^4) = 2^3 - 2$, $\chi(\rho^3) = 2^4 - 2$. De banenformule geeft nu dat er 26 verschillende Ajaxtaarten zijn.

Opgave 4

(a) Ondergroepen van de D_5 moeten orde 1, 2, 5 of 10 hebben. Van orde 1 is er te triviale ondergroep $\{1\}$, van orde 2 zijn er vijf ondergroepen voortgebracht door een spiegeling, van orde 5 is er de groep van rotaties (een C_5), en van orde 10 is er de D_5 zelf. De triviale ondergroep en de D_5 zijn normaal. De ondergroepen van orde 2 zijn niet normaal (immers: een spiegeling geconjugeerd met een rotatie geeft een andere spiegeling). De ondergroep van orde 5 is de kern van de determinantafbeelding en dus normaal.

(b) De S_3 bevat geen element van orde 5, dus alle rotaties (van orde 5) zitten in de kern van elk homomorfisme van D_5 naar S_3. Dat betekent dat de kern of de C_5, of de D_5 is. Als het de D_5 is, is het homomorfisme het triviale homomorfisme (dus 1 mogelijkheid). Als het de C_5 is, moet een spiegeling $\sigma \in D_5$ naar een element van S_3 van orde 2 gestuurd worden. Hiervoor zijn 3 keuzes, dus in totaal zijn er $1 + 3 = 4$ homomorfismen van D_5 naar S_3.

Opgave 5

(a) Er geldt voor alle $a \in \mathbf{Z}$ dat $a^3 \equiv a \bmod 3$, dus $a^6 \equiv a^2 \bmod 6$. Ook geldt $a^5 \equiv a \bmod 5$, dus $a^6 \equiv a^2 \bmod 5$. Als a oneven is geldt dat $a^6 \equiv a^2 \equiv 1 \bmod 4$, en als a even is geldt dat $a^6 \equiv a^2 \equiv 0 \bmod 4$. Met de Chinese reststelling geldt dus nu dat $a^6 \equiv a^2 \bmod 4 \cdot 3 \cdot 5$.

(b) Als $a^6 \equiv a^2 \bmod n$ geldt in het bijzonder dat $2^6 \equiv 2^4 \bmod n$, dus $64 \equiv 4 \bmod n$. Hieruit volgt dat n een deler is van $64 - 4 = 60$.