Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 1, maandag 7 juni 2004, 10.00–13.00 uur

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt.

Notatie. Voor een niet-negatief geheel getal n geven we met S_n de verzameling permutaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$ aan.

Opgave 1. (a) Schrijf een permutatie $\sigma \in S_9$ op met de eigenschap dat voor alle $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ geldt:

$$\sigma(x) \equiv 5x + 2 \bmod 9.$$

(b) Bereken de orde van σ en van σ^{999}.

Opgave 2. Stel G is een groep met de eigenschap dat elk element van G geconjugeerd is met zijn inverse. Bewijs: voor alle a, $b \in G$ zijn de elementen ab en $a^{-1}b^{-1}$ geconjugeerd.

Opgave 3. Een *Ajaxtaart* is een ronde marsepeinen taart met zeven kaarsjes, één in het midden en de andere zes regelmatig verdeeld langs de rand; elk kaarsje is rood of wit, maar niet alle kaarsjes hebben dezelfde kleur. Hoeveel echt verschillende Ajaxtaarten zijn er?

Opgave 4. Zij D_5 de diëdergroep van orde 10.

(a) Hoeveel ondergroepen heeft D_5? En hoeveel hiervan zijn normaal?

(b) Hoeveel groepshomomorfismen $D_5 \to S_3$ zijn er?

Opgave 5. (a) Bewijs: $a^6 \equiv a^2 \bmod 60$ voor alle $a \in \mathbf{Z}$.

(b) Stel dat n een positief geheel getal is met de eigenschap dat voor alle $a \in \mathbf{Z}$ geldt: $a^6 \equiv a^2 \bmod n$. Bewijs: n is een deler van 60.