Uitwerking tentamen Algebra I, 6 juni 2005

Opgave 1

(a) $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ heeft orde 7.

(b) Het aantal elementen in de conjugatieklasse van σ is het aantal 7-cykels, hetwelk gelijk is aan $6! = 720$.

(c) Merk op: $2005 \equiv 3 \bmod 7$, dus $(\sigma^{2005})^{2005} = \sigma^9 = \sigma^2 = (1\,3\,5\,7\,2\,4\,6)$.
We berekenen $2005^{2005} \equiv 3 \bmod 7$, en dus $\sigma^{(2005^{2005})} = \sigma^3 = (1\,4\,7\,3\,6\,2\,5)$.

Opgave 2

(a) Daar $\mathrm{ggd}(7,9) = 1$ bestaat er een $x \in \mathbf{Z}$ met de genoemde eigenschap. Als $x \equiv 2 \bmod 9$, dan $\exists k \in \mathbf{Z}$ met $x = 2 + 9k$. Invullen in $x \equiv 1 \bmod 7$ levert dan $k \equiv 3 \bmod 7$. We zien dat $x = 2 + 9 \cdot 3 = 29$ voldoet aan beide congruenties.

(b) Als $y \in \mathbf{Z}$ voldoet aan beide congruenties, dan geldt in het bijzonder $y \equiv 1 \bmod 3$, en $y \equiv 2 \bmod 3$, hetwelk niet kan.

Opgave 3

(a) Met inductie: voor $n = 1$ is het triviaal. Stel dat voor alle $m \leq n$ geldt $(xy)^m = x^m y^m$. Nu geldt: $(xy)^{n+1} = (xy)^n xy = x^{n+1} y^{n+1}$.

(b) In het bijzonder geldt de relatie voor $n = 2$, i.e., we hebben $(xy)^2 = x^2 y^2$. Hieruit volgt direct dat $xy = yx$ geldt.

(c) Aldus: $[x,y]^k = (xyx^{-1}y^{-1})^k = x^k (yx^{-1}y^{-1})^k = x^k y x^{-k} y^{-1} = [x^k, y] = [1, y] = 1$.

Opgave 4

(a) De C_{10} is abels en de D_5 niet, dus ze kunnen niet isomorf zijn.

(b) Zij $f : C_{10} \to D_5$ een homomorfisme. Daar C_{10} cyclisch is, ligt f vast als we het beeld van een voortbrenger α van C_{10} geven. Daar voor ieder element $x \in D_5$ geldt dat $x^{10} = 1$, mogen we α overal heensturen. We krijgen dus 10 homomorfismen.
Alternatief: voor $\ker(f)$ hebben we C_2, C_5 en C_{10} als mogelijkheid. Voor $\ker(f) = C_2$ heeft het beeld orde 5. Dit levert ons 4 keuzes. Voor $\ker(f) = C_5$ heeft het beeld orde 2. Dit levert ons 5 keuzes. Voor $\ker(f) = C_{10}$ heeft het beeld orde 1. Dit levert ons 1 keuze. In totaal zijn er dus $5 + 4 + 1 = 10$ keuzes voor f.

(c) Daar C_{10} abels is, factoriseert ieder homomorfisme $D_5 \to C_{10}$ via $D_5/[D_5, D_5]$. Het is eenvoudig in te zien dat $[D_5, D_5] = C_5$ geldt. (Immers: het moet een normale ondergroep zijn van de D_5, dus gelijk aan $\{e\}$, C_5 of D_5. Aangezien D_5 niet abels is, valt $\{e\}$ af. Aangezien $D_5/C_5 \cong C_2$ abels is, valt D_5 af.) We zien: $\#\mathrm{Hom}(D_5, C_{10}) = \#\mathrm{Hom}(C_2, C_{10}) = 2$.

Opgave 5

(a) Het is evident dat we de D_5 als ondergroep van de draaiingsgroep G kunnen opvatten, dus we moeten bewijzen dat G exact 10 elementen heeft. Laat G daartoe werken op verzameling vlakken. De stabilisator van het bovenvlak heeft orde 5 en de baan heeft lengte 2. We zien: G heeft $5 \cdot 2 = 10$ elementen.

(b) Zij X de verzameling Vijfhuizer prisma's. We bepalen $\#(G\backslash X)$ met de banenformule. Schrijf $G = \langle \rho, \sigma \rangle$ met ρ van orde 5 en σ van orde 2. Merk op: $\chi(1) = 2^7$, $\chi(\rho^k) = 2^3 \quad (1 \leq k \leq 4)$ en $\chi(\sigma\rho^k) = 2^4 \quad (1 \leq k \leq 5)$. De banenformule levert nu dat er 24 verschillende Vijfhuizer prisma's zijn.