

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

**Tentamen Algebra 1, donderdag 11 juni 2009, 14.00–17.00 uur**

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt.

### Opgave 1

Het jaartal  $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$  is niet priem.

a. Wat is de orde van de groep  $(\mathbf{Z}/2009\mathbf{Z})^*$ ?

Voor  $n \in \mathbf{Z}$  geven we met  $\sigma_n : (\mathbf{Z}/2009\mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/2009\mathbf{Z})^*$  de afbeelding  $x \mapsto x^n$  aan.

b. Bepaal het kleinste gehele getal  $n > 1$  waarvoor  $\sigma_n$  een bijectie is.

### Opgave 2

Bepaal het aantal elementen in  $\text{Hom}(A, B)$  als

a.  $A = C_3$  en  $B = C_{11}$ ;

b.  $A = S_6$  en  $B = C_3$ ;

c.  $A = C_3$  en  $B = S_6$ .

Hierbij geven we met  $C_n$  een cyclische groep van orde  $n$  aan, en met  $S_n$  de permutatiegroep op een verzameling van  $n$  elementen.

Vergeet de achterkant niet.

### Opgave 3

Een *Rijnlandse Rammelaar* is een veelvlak verkregen door twee tetraëders met twee zijvlakken aan elkaar te plakken, zoals op het plaatje aangegeven.

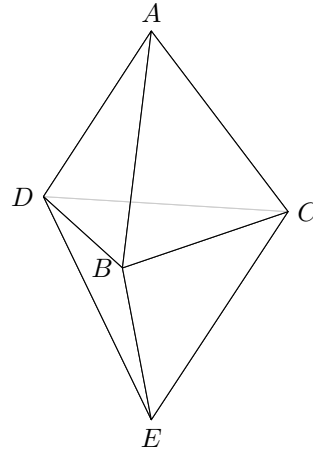
Zij  $G$  de symmetriegroep van deze figuur. De groep  $G$  bestaat dus uit draaiingen, spiegelingen en samenstellingen daarvan.

a. Bepaal de orde van de stabilisator in  $G$  van hoekpunt  $A$ . Wat is de lengte van de baan van dit hoekpunt onder de werking van  $G$ ?

b. Schrijf alle elementen van  $G$  op als permutaties van de vijf hoekpunten. Gebruik disjuncte-cykelnotatie.

De handelseditie van de Rijnlandse Rammelaar heeft op elk van zijn hoekpunten een gekleurd bolletje. Er zijn tien verschillende kleuren beschikbaar. Twee rammelaars noemen we hetzelfde als ze door  $G$  in elkaar kunnen worden overgevoerd.

c. Hoeveel verschillende Rijnlandse Rammelaars zijn er?



### Opgave 4

a. Bepaal een geheel getal  $x$  waarvoor  $x \equiv 3 \pmod{1020}$  en  $x \equiv 1 \pmod{101}$  gelden.

b. Wat zijn de kleinste twee positieve getallen  $x$  die aan deze eisen voldoen?

### Opgave 5

a. Bestaat er een niet-triviaal homomorfisme  $f : S_{2009} \rightarrow S_{2009}$  met de transpositie  $(1\ 2)$  in de kern?

b. Zijn er meer dan 2009 verschillende homomorfismen  $f : S_{2009} \rightarrow S_{2009}$  met de 3-cykel  $(1\ 2\ 3)$  in de kern?

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.