Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2

20 januari 2016, 10:00–13:00

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen. Opgaven uit het dictaat mag je niet *zonder bewijs gebruiken.*

1. Ontbind de volgende ring-elementen in irreducibele elementen:

(a) $4 + 10i$ in $\mathbb{Z}[i]$;

(b) $X^3 + 5X + 6$ in $\mathbb{Q}[X]$;

(c) $X^3 + X + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$.

2. (a) Laat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de drie complexe nulpunten van het polynoom

$$X^3 + 3X + 1$$

zijn. Bereken $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

(b) Voor welke priemgetallen p heeft het polynoom $X^3 + 3X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ een dubbel nulpunt in $\mathbb{F}_p$?

3. Zij R de quotientring $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1)$.

(a) Laat zien dat elk element van R gerepresenteerd wordt door een uniek polynoom van graad ≤ 1.

(b) Bereken de inverse van het element $X + 1 \in R$.

4. (a) Bepaal alle monische, irreducibele polynomen van graad 2 in $\mathbb{F}_3[X]$.

(b) Zij p een priemgetal. Hoeveel monische, irreducibele polynomen van graad 2 zijn er in $\mathbb{F}_p[X]$?

5. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:

(a) een kort exact rijtje van $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-modulen dat niet splitst;

(b) een deelverzameling van $\mathbb{C}^2$ die niet algebraïsch is;

(c) twee $\mathbb{R}[X]$-modulen die niet isomorf zijn als $\mathbb{R}[X]$-modulen, maar wel isomorf zijn als $\mathbb{R}$-modulen.