Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2

21 januari 2015, 10:00–13:00

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen. Opgaven uit het dictaat mag je niet *zonder bewijs gebruiken.*

1. Bepaal een voortbrenger van het ideaal $(6+9i, 1-5i)$ in $\mathbb{Z}[i]$. Is dit ideaal een priemideaal?

2. Ontbind het polynoom $X^3 + 3X^2 + X - 65$ in elk van de ringen $\mathbb{F}_2[X]$, $\mathbb{F}_3[X]$, $\mathbb{F}_5[X]$ en $\mathbb{Q}[X]$ in irreducibele factoren.

3. Zij $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ complexe getallen die voldoen aan:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 6, \quad \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = -15.$$

Bepaal de coëfficiënten van het polynoom $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$. Zijn twee van de getallen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gelijk aan elkaar?

4. Beschouw de deelring

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ onderling ondeelbaar, } 7 \nmid b \right\}$$

van $\mathbb{Q}$ bestaande uit alle breuken waarvan de noemer niet deelbaar is door 7. Je mag aannemen dat R inderdaad een ring is.

(a) Laat zien dat de eenhedengroep van R gelijk is aan

$$\left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ onderling ondeelbaar, } 7 \nmid ab \right\}.$$

(b) Laat zien dat R een hoofdideaaldomein is. [Hint: als $I \subset R$ een ideaal is, beschouw dan $I \cap \mathbb{Z}$.]

(c) Laat zien dat elk niet-nul ideaal van R voortgebracht wordt door een macht van 7.

5. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:

(a) een $\mathbb{Z}$-moduul dat torsie-vrij maar niet vrij is;

(b) een ring R, een vrij R-moduul M en een deelmoduul $N \subset M$ dat niet vrij is;

(c) een kort exact rijtje van $\mathbb{R}[X]$-modulen dat niet splitst.