Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, donderdag 15 maart 2018, 14.00–17.00 uur

Motiveer steeds je antwoord, en vermeld welke stellingen je gebruikt.

1. Zij $\mathbf{Z}[i]$ de ring van gehele getallen van Gauss.

a. Bepaal de ggd van 85 en $5 - 3i$ in $\mathbf{Z}[i]$.

b. Hoeveel verschillende ringhomomorfismen $\mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}/85\mathbf{Z}$ bestaan er?

2. Beschouw de afbeelding h: $\mathbf{Z}[X] \to (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ gedefinieerd door

$$h(f) = (f(0)\mathrm{mod}4, f(2)\mathrm{mod}4).$$

a. Laat zien dat h een ringhomomorfisme is.

b. Is h surjectief?

c. Geef voortbrengers voor de kern I van h.

d. Is I een priemideaal?

3. Bepaal voor elk van de volgende drie idealen in welk van de ringen $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_{19}[X]$ het priem is:

$$(X^{2018} + 3X + 15), \qquad (X^{2018} + 3X + 15,\ X - 1), \qquad (X^{2018} + 3X + 15,\ 19).$$

(Motiveer je $3 \times 3 = 9$ antwoorden!)

4. Definieer de ondergroepen $A, B \subset \mathbf{Z}^3$ door

$$A = \{(a,b,c) \in \mathbf{Z}^3 : a + b - 5c = 0\};$$
$$B = \{(a,b,c) \in \mathbf{Z}^3 : a + 2b - 5c \equiv 0 \bmod 10\}.$$

Geef een minimaal stel voortbrengers voor A, voor B, en voor

$$A + B = \{x + y\colon x \in A, y \in B\}.$$

5. Zij $M = (a_{ij})_{i,j=1}^{2018}$ de complexe matrix met coëfficiënten

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{voor } i+j \text{ oneven;} \\ 1 & \text{voor } i+j \text{ even.} \end{cases}$$

Bepaal het karakteristieke polynoom, het minimumpolynoom en de Jordan-normaalvorm van M.