

## Herkansingstentamen Algebra 2

maandag 6 augustus 2001, 14–17 uur

- Je mag je dictaat en aantekeningen gebruiken.
  - Alleen het gebruik van niet-programmeerbare rekenmachines is toegestaan.
  - Geef niet alleen de antwoorden maar laat ook zien hoe je er aan komt.
  - De uitslag wordt in de loop van deze week bekend gemaakt op de Algebra 2 webpagina <http://www.math.leidenuniv.nl/~evertse/algebra2.shtml>
1. Ontbind het volgende polynoom in irreducibele factoren:  $X^4 + 8X^3 + 5X^2 - 12X + 1$  in  $\mathbb{F}_2[X]$ ,  $\mathbb{F}_3[X]$ ,  $\mathbb{Z}[X]$ .
  2. Zij  $\alpha$  het reële nulpunt van  $X^5 - 2$ .
    - a) Schrijf  $\frac{1}{\alpha^2+1}$  als lineaire combinatie van  $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$  met coëfficiënten in  $\mathbb{Q}$ .
    - b) Bepaal de graad van het ontbindingslichaam van  $X^5 - 2$  over  $\mathbb{Q}$ .
  - 3.a) Ontbind  $3 + 4i$  en  $6 + 6i$  in  $\mathbb{Z}[i]$  in irreducibele factoren.  
b) Bepaal de getallen  $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$  die voldoen aan  $\gamma - 2 \in (3 + 4i)$  en  $\gamma - i \in (6 + 6i)$ .
  4. Ga voor elk van de volgende idealen na of het priemidealen of maximale idealen zijn in de gegeven ring:
    - a)  $(X^{11} - 88X^5 + 22)$  in  $\mathbb{Q}[X]$  en  $\mathbb{Z}[X]$ ;
    - b)  $(X - 1, Y - 2)$  in  $\mathbb{Q}[X, Y]$  en  $\mathbb{Z}[X, Y]$ .
  5. Gegeven is het polynoom  $f_a = X^p - X - a$  voor  $a \in \mathbb{F}_q$ .
    - a) Bewijs: als  $\alpha$  een nulpunt van  $f_a$  is in een of andere uitbreiding van  $\mathbb{F}_q$  dan is  $\alpha + c$  een nulpunt van  $f_a$  voor elke  $c \in \mathbb{F}_p$ .
    - b) Bewijs dat voor  $a \in \mathbb{F}_q$  geldt: óf  $f_a$  heeft een nulpunt in  $\mathbb{F}_q$  (en dan dus al zijn nulpunten in  $\mathbb{F}_q$ ) óf  $f_a$  is irreducibel in  $\mathbb{F}_q[X]$ . (Aanw. laat zien dat alle irreducibele factoren van  $f_a$  in  $\mathbb{F}_q[X]$  dezelfde graad hebben).
    - c) Bewijs dat het aantal elementen  $a \in \mathbb{F}_q$  waarvoor  $f_a$  irreducibel is in  $\mathbb{F}_q[X]$  gelijk is aan  $p^k - p^{k-1}$ .

**Normering:** (onder voorbehoud):

1 10; 2a 5, 2b 5; 3a 4, 3b 6; 4a 5, 4b 5; 5a 3, 5b 3, 5c 4; .

**Cijfer** = (aantal punten)/5.