Tentamen Algebra 2

donderdag 4 januari 2001, 10–13 uur

- Je mag je dictaat en aantekeningen gebruiken.
- Alleen het gebruik van niet-programmeerbare rekenmachines is toegestaan.
- Geef niet alleen de antwoorden maar laat ook zien hoe je er aan komt.
- Het achterstallige huiswerk mag ook schriftelijk worden ingeleverd in het postvak van J.-H. Evertse (kamer 209). Maar dit wordt dan pas in februari nagekeken.

1. Ontbind $X^5 - 4X^4 + 3X^3 + 3X - 3$ in $\mathbb{Z}[X]$ en in $\mathbb{F}_2[X]$ in irreducibele factoren.

2. Gegeven is dat $f = X^3 - 6X - 1$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$.

a) Zij $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, waarbij α een nulpunt is van f in $\overline{\mathbb{Q}}$ (de algebraïsche afsluiting). Schrijf $(\alpha - 5)^{-1}$ als lineaire combinatie van $1, \alpha, \alpha^2$ met coëfficiënten in $\mathbb{Q}$.

b) Bepaal het minimumpolynoom van α^2 over $\mathbb{Q}$.

3. Ga voor de volgende ringen R en idealen I van R na of I een priemideaal dan wel maximaal ideaal is van R:

a) $R = \mathbb{Z}[X]$, $I = (X^2 + X + 1, 2)$;

b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = (4 + 7i, 1 + 3i)$;

c) $R = \mathbb{C}[X, Y]$, $I = (X^3 + 3X^2Y^3 + XY^2 + Y)$.

4. Zij $\mathbb{F} = \mathbb{F}_5(\alpha)$ waarbij α een nulpunt is van $X^2 - X + 2$ (gegeven is dat $X^2 - X + 2$ irreducibel is in $\mathbb{F}_5[X]$).

a) Laat zien dat α een voortbrenger is van $\mathbb{F}^*$.

b) Geef een expliciet isomorfisme van $\mathbb{F}'$ naar $\mathbb{F}$ waarbij $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_5(\beta)$ met β een nulpunt van $X^2 + X + 1$.

5. Zij R een commutatieve ring met $R \neq \{0\}$. Zij $R_1 = R[X]/(X^2)$. Elke restklasse in $R[X]/(X^2)$ bevat precies één polynoom van de vorm $a + bX$ met $a, b \in R$. We geven met $\overline{a + bX}$ de restklasse van $a + bX$ modulo (X^2) aan.

a) Bewijs: $\overline{a + bX} \in R_1^* \iff a \in R^*$.

b) Zij $\overline{a + bX} \neq \overline{0}$.
Bewijs: $\overline{a + bX}$ is een nuldeler van $R_1 \iff a = 0$ of a is een nuldeler van R.

c) Bewijs: $\overline{a + bX}$ is een nilpotent element van $R_1 \iff a$ is een nilpotent element van R.

Normering: (onder voorbehoud):
1 10; 2a 5, 2b 5; 3a 3, 3b 3, 3b 4; 4a 6, 4b 4; 5a 3, 5b 3, 5c 4; .
Cijfer = (aantal punten)/5.