Tentamen Algebra 2, Leiden, 4 augustus 2003

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

Opgave 1. Ontbind de volgende polynomen in $\mathbb{Z}[X]$:
(a) $X^3 + 5X^2 + 7X + 2$,
(b) $X^5 - 2$
(c) $X^5 - 1$

Opgave 2. Zij $\mathbb{F}_2$ het lichaam met 2 elementen en definieer $F := X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.
(a) Is de quotientring $A = \mathbb{F}_2[X]/(F)$ een lichaam?
(b) Is $1 + \bar{X} \in A$ inverteerbaar? Zo ja, bepaal de inverse.
(c) Is $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 51X + 945)$ een lichaam?

Opgave 3. Laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_{10} \in \mathbb{C}$ zodat het polynooom $f = X^{10} - 2X^9 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ ontbindt als $f = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_{10})$.
(a) Bewijs dat $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{10} = 2$.
(b) Bereken $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{10}^2$.

Opgave 4. Zij $f : R_1 \to R_2$ een ringhomomorfisme en $f^* : R_1 \to R_2$ het geïnduceerde homomorfisme op de eenhedengroepen. Geef voor de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.
(a) Als f surjectief is, dan is f^* surjectief.
(b) Als f^* surjectief is, dan is f surjectief.
(c) Als f^* injectief is, dan is f injectief.

Opgave 5. Geef een verzameling voortbrengers voor de additieve groep

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 15x + 6y + 10z = 0\},$$

waarvan het aantal zo klein mogelijk is.

— SUCCES —