Tentamen Algebra 2, Leiden, 16 januari 2003

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

Opgave 1. Ontbind de volgende getallen in $\mathbb{Z}[i]$:
(a) $6 + 3i$;
(b) 22;
(c) $12 - 5i$.

Opgave 2. Zij $\mathbb{F}_5$ het lichaam met 5 elementen en definieer $F := X^3 + 3X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.
(a) Is de quotientring $A = \mathbb{F}_5[X]/(F)$ een lichaam?
(b) Is $\bar{X} \in A$ inverteerbaar? Zo ja, bepaal de inverse.
(c) Is $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 3X + 1)$ een domein? Is het een lichaam?

Opgave 3. Laat R een commutatieve ring zijn, en laat I een R-ideaal zijn. Definieer het *radicaal* van I als

$$\sqrt{I} = \{x \in R : \text{er is een } k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ zodat } x^k \in I\}.$$

Bewijs de volgende uitspraken:
(a) $I \subseteq \sqrt{I}$;
(b) $\sqrt{I} = R \Longleftrightarrow I = R$;
(c) als I priem is, dan geldt $\sqrt{I^3} = I$;
(d) $\sqrt{I}$ is een R-ideaal.

Opgave 4. Laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_{10} \in \mathbb{C}$ zodat het polynooom $f = X^{10} - X + 2 \in \mathbb{C}[X]$ ontbindt als $f = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_{10})$.
(a) Bewijs dat $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{10} = 0$
(b) Bewijs dat $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{10}^2 = 0$
(c) Bepaal de discriminant van f, i.e., bereken

$$\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Opgave 5. Geef een verzameling voortbrengers voor de additieve groep

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 15x + 21y + 35z = 0\},$$

waarvan het aantal zo klein mogelijk is.

— SUCCES —