Tentamen Algebra 2, 17 december 2004, 10:00 – 13:00

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

Opgave 1. Ontbind de volgende polynomen in irreducibele factoren in $\mathbf{Z}[X]$ en in $\mathbf{Q}[X]$:
(a) $3X - 12$;
(b) $X^5 - 5$;
(c) $X^7 - 1$;
(d) $X^4 - 20X^3 + 100X^2 - 4$.

Opgave 2. Laat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8 \in \mathbf{C}$ zodat het polynoom $f = X^8 - 2X^5 + 3 \in \mathbf{C}[X]$ ontbindt als $f = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_8)$.
(a) Bewijs dat $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_8 = 0$.
(b) Bereken $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \cdots + \alpha_1^2\alpha_8 + \alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_2^2\alpha_3 + \cdots + \alpha_2^2\alpha_8 + \alpha_3^2\alpha_1 + \cdots + \alpha_8^2\alpha_1 + \cdots + \alpha_8^2\alpha_7$.

Opgave 3. Bepaal in $\mathbf{Z}[i]$ de ggd van $7 + 100i$ en $100 + 6i$.

Opgave 4. Zij R de verzameling $\{\frac{a}{2^k} \in \mathbf{Q} : a, k \in \mathbf{Z}, k \geq 0\}$.
(a) Bewijs dat R een ring is en dat $\mathbf{Z}$ een deelring is van R.
(b) Zij $I = (3)$ het hoofdideaal van R voortgebracht door 3 en $J = (2)$. Bepaal R/I en R/J.
(c) Bepaal de eenhedengroep R^* van R.

Opgave 5. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van de complexe matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$