

Tentamen Algebra 2, 25 februari 2005, 14:00 – 17:00

Geef steeds een volledige uitwerking en verwijs naar de stellingen uit de syllabus die je gebruikt.

Opgave 1. Ontbind de volgende polynomen in irreducibele factoren in $\mathbf{Z}[X]$ en in $\mathbf{Q}[X]$:

- (a) $X^4 - 18X^2 + 3X - 3$;
- (b) $X^4 + X^3 + 5X^2 + 3X + 6$;
- (c) $2X^3 - 14X + 18$.

Opgave 2. Laat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7 \in \mathbf{C}$ zodat het polynoom $f = X^7 - 2X^5 + X^4 - 5 \in \mathbf{C}[X]$ ontbindt als $f = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_7)$.

- (a) Bewijs dat $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7 = 0$.
- (b) Bereken $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_7$.
- (c) Bereken $\alpha_1^3 \alpha_2 + \alpha_1^3 \alpha_3 + \cdots + \alpha_1^3 \alpha_7 + \alpha_2^3 \alpha_1 + \alpha_2^3 \alpha_3 + \cdots + \alpha_2^3 \alpha_7 + \alpha_3^3 \alpha_1 + \cdots + \alpha_3^3 \alpha_1 + \cdots + \alpha_7^3 \alpha_1 + \cdots + \alpha_7^3 \alpha_6$.

Opgave 3. Bepaal de ggd van $7 + 41i$ en $82 + 4i$ in $\mathbf{Z}[i]$.

Opgave 4. Definieer de ring $R = \text{Map}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ met puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging.

- (a) Bepaal de eenhedengroep R^* van R .
- (b) Zij $\text{id} \in R$ de afbeelding gegeven door $x \mapsto x$ en $I = (\text{id}) \subset R$ het hoofdideaal voortgebracht door id . Bewijs: $I = \{f \in R : f(0) = 0\}$.
- (c) Bepaal R/I .

Opgave 5. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van de complexe matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$