

Tentamen Analyse 1W

Vrijdag 6 januari 2017, 14:00–17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
 - Er zijn zes opgaven. Vergeet de achterkant niet!
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.
-

1 De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + 2, & x \leq 0, \\ 2\sqrt{x+1}, & 0 < x \leq 1, \\ 2\sqrt{2} + 1 - x, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{x^2 - \frac{7}{2}x + 4}{3x - 6}, & x > 2. \end{cases}$$

- Toon aan dat f continu is in 1.
- Toon aan dat f differentieerbaar is in 0.
- Is f continu in 0? Beargumenteer!
- Bepaal de afgeleide f' van f op $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.
- Ga na of f asymptoten (verticaal, horizontaal of scheef) heeft en bepaal de vergelijkingen van de eventuele asymptoten.
- Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 Bekijk de functie $g : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x) = \cos(x^2 + x), \quad x \in [0, \frac{1}{2}].$$

- Toon aan dat g strict dalend is.
- Bepaal het bereik B van g . Geef een volledig bewijs!
- Beredeneer dat $g : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow B$ inverteerbaar is en geef een functievoorschrift voor de inverse g^{-1} .
- Ga na dat $g(\frac{1}{10}) = \cos(\frac{11}{100})$ en bepaal de afgeleide van g^{-1} in het punt $\cos(\frac{11}{100})$.

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergeren, voorwaardelijk convergeren of divergeren:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^2 + n)},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}n} 2^n}{(2n)!}.$$

4 Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

$$(a) \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx,$$

$$(b) \int \frac{e^x \ln(e^x + 1)}{\sqrt{e^x + 1}} dx,$$

$$(c) \int \frac{4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 2x + 3)(x + 1)} dx.$$

5 Bepaal het vijfdegraads Taylorpolynoom rond $a = 0$ van de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = x \arctan(x) - \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6 Gebruik het eerstegraads Taylorpolynoom van $x \mapsto \tan(e^x)$ rond $a = \ln(\frac{\pi}{4})$, in combinatie met de foutterm, om te laten zien dat voor iedere $x \in [-1, \ln(\frac{\pi}{4})]$ geldt dat

$$\frac{1}{2e} (x - \ln(\frac{\pi}{4}))^2 \leq \tan(e^x) - 1 - \frac{\pi}{2} (x - \ln(\frac{\pi}{4})) \leq (\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}) (x - \ln(\frac{\pi}{4}))^2.$$

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	Totaal
Punten:	25	10	25	25	5	10	100
	(2+3+2+4+5+9)	(2+3+3+2)	(8+7+10)	(7+8+10)	(5)	(10)	