Tentamen Analyse 1W

Maandag 8 januari 2018, 14:00–17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **zes** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.

---

1 De functie $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+4}, & -3 \leq x \leq -1, \\ \ln(3+2x-x^2), & -1 < x \leq 2, \\ 2+\ln(3) - 2\sqrt[3]{x-1}, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

(a) Ga na dat f goed gedefinieerd is op $(-1, 2]$.

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is in 2.

(c) Is f continu in 2? Beargumenteer!

(d) Bepaal de eventuele verticale asymptoot van f.

(e) Bepaal de afgeleide f' van f op $(-3, 3) \setminus \{-1, 2\}$.

(f) Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 De kromme K bestaat uit alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die voldoen aan

$$(x-2y)^3 - 3x + y = 0.$$

Bepaal de coördinaten van de punten op K waar de raaklijn aan K horizontaal is. Je mag het volgende gegeven gebruiken: in ieder punt (x, y) op K waar de raaklijn aan K horizontaal is, is de kromme K in de buurt van dat punt gelijk aan de grafiek van een differentieerbare functie f die gedefinieerd is op een open interval dat x bevat.

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergeren, voorwaardelijk convergeren of divergeren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^4+(-1)^n\ln(n)}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{(3n)!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n)\right)$.

4 Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

(a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\left(\tan(x)-1\right)\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2+8x+5}{x^3+2x^2+5x}dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x^2-x^2\ln^2(x)}}\,dx$.

5 Gebruik het eerstegraads Taylorpolynoom van $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ rond $a=1$, in combinatie met de foutterm, om te laten zien dat voor iedere $x\in[1,4]$ geldt dat

$$0\leq e^{\sqrt{x}}-e-\frac{e}{2}(x-1)\leq\frac{e^2}{16}(x-1)^2.$$

6 Bekijk de functie $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Geef het zevendegraads Taylorpolynoom van g rond het punt $a=0$.

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	Totaal
Punten:	23 (2+5+2+2+4+8)	8 (8)	23 (6+6+6+5)	22 (6+10+6)	8 (8)	6 (6)	90

Eindcijfer := $\frac{\text{aantal punten}}{9}$