ANALYSE 1, DEELTENTAMEN A

maandag 20 oktober 2003, 11:00–13:00

Vermeld niet alleen uw naam, maar ook uw studentnummer en studie(s).
Een (grafische) rekenmachine is toegestaan, een formulekaart niet. Let wel: eindantwoorden alleen tellen niet! Een goede motivatie en/of berekening is noodzakelijk.

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven. Vergeet de achterkant niet. Succes!

---

1. Schrijf het complexe getal

$$\frac{(1+2i)(-1+7i)}{i(1-3i)}$$

in de vorm $a+bi$, met a en b reëel.

2. Bepaal alle complexe oplossingen van de vergelijking

$$(z+1)^3 = -27$$

en schets ze in het complexe vlak.

3. (a) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

(b) Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. (a) Bereken voor $c \in \mathbb{R}$ de volgende limiet:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + c^2x^2} - 1}{x^2}.$$

(b) Laat voor $c \in \mathbb{R}$ de functie $f_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 + c^2x^2} - 1}{x^2} & \text{voor } x < 0, \\ \dfrac{c}{2}\cos x & \text{voor } x \geq 0. \end{cases}$$

Voor welke waarde(n) van c is f_c continu in 0?

ZIE OMMEZIJDE

5. De kromme in het vlak, gegeven door de vergelijking

$$x^4 + y^8 + \sin(\pi y) = 2,$$

heeft—u hoeft dit niet te bewijzen—een welgedefinieerde raaklijn in het punt $(1, 1)$. Bereken de helling (richtingscoëfficiënt) van die raaklijn.

6. Bepaal de afgeleide van de functie $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x) = \left(1 + e^{\frac{1}{x^2+1}}\right)^{200} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

7. Laat de functie $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = 0, \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{voor } x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Is f continu in 0?

(b) Is f differentieerbaar in 0?

Motiveer uw antwoorden onder (a) en (b).