Tussententamen Analyse I,

17 oktober 2005, 11.00–13.00 uur

Opmerking: met log wordt zoals gebruikelijk de natuurlijke logaritme aangegeven.

1. (a) Geef de definitie van continuïteit van een functie in een punt.

   (b) Zij $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^4-1} & (x \neq 1), \\ a & (x = 1). \end{cases}$$
   Bepaal a zodanig dat f continu is op zijn gehele domein.

2. Bepaal, indien ze bestaan, de volgende limieten. Als een limiet niet bestaat, laat zien waarom niet.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}, \qquad \lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2+5x-5}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x-1|-|x+1|},$$
$$\lim_{x\downarrow 0} x\log(\log x). \qquad \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x^2}$$

3. (a) Bepaal de afgeleide van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$
   in $x = 0$.

   (b) Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

   i. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(1 + \log x)$,

   ii. $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{1+x}})$.

4. (a) Formuleer de middelwaardestelling (voor differentieerbare functies).

   (b) Bewijs met behulp van de middelwaardestelling dat
$$\tan\beta - \tan\alpha > \beta - \alpha,$$
   voor alle α, β met $0 < \alpha < \beta < \pi/2$.

5. (a) Los op: $z^3 = -8i$.

   (b) Teken de volgende verzamelingen in het complexe vlak:
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+i|\}, \ \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z = |z-i|\}.$$

Cijfer $= 1 + \frac{(5+15)+(4+4+4+4+4+4)+(10+10)+(7+8)+(7+8)}{10}$.