

TENTAMEN ANALYSE 1.
dinsdag 3 april 2007, 14.00-17.00.

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten: de eerste vijf opgaven gaan over de stof van het eerste gedeelte van het college. De laatste vijf opgaven gaan over de stof van het tweede gedeelte van het college. Voor beide onderdelen wordt een cijfer gegeven. Het tentamencijfer bestaat voor 40% uit het cijfer van het eerste gedeelte en voor 60% uit het cijfer van het tweede gedeelte waarbij geldt dat het cijfer van het eerste gedeelte vervangen wordt door het cijfer van de toets van 23 oktober 2006 indien dit laatste hoger uitvalt. Tenslotte worden bij het tentamencijfer de bonuspunten van het huiswerk opgeteld.

Bij het tentamen mogen alleen rekenmachines worden gebruikt van het type dat op het VWO-examen is toegestaan. Het gebruik van een formulekaart is niet toegestaan.

Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.

1. Bepaal alle oplossingen in het complexe vlak van de vergelijking $(z - 3)^4 = -256$. Geef tevens in een tekening de ligging van deze oplossingen aan. (10 pt)
2. Los het volgende beginwaardenprobleem op:
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases} \quad . \quad (10\text{pt})$$
3. Beschouw de functies $f_c(x) = e^{-|x|}(\sin x + c \cos x)$ met c een reëel getal.
Voor welke c is f_c differentieerbaar op \mathbf{R} ? Bepaal in de voorkomende gevallen $f'_c(0)$. (8 pt)
- 4a. Bewijs dat de functie $g(x) = \tanh x + x$ inverteerbaar is op \mathbf{R} . (5 pt)
b. Bereken $(g^{-1})'(0)$. (4 pt)
5. De kromme K heeft vergelijking $\cos(x + y) + y^2 \sin(x - y) = -1$. Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan K in het punt $(0, \pi)$. (10 pt)

De opgaven 6-10 staan op de ommezijde.

6. Beschouw de functie $h(x) = \ln(1 - \cos x)$.
- Bepaal de asymptoten van h . (3 pt)
 - Bepaal de extremen van h en geef aan of het (locale) maxima dan wel minima zijn. (7 pt)
 - Bepaal de coördinaten van eventuele buigpunten van de grafiek van h . (3 pt)
 - Gebruik de onderdelen (a)-(c) om de grafiek van h te schetsen. Geef duidelijk je werkwijze aan. (3 pt)

7. Bereken de integraal $\int_0^1 \ln^3 x \, dx$. (10 pt)

8. Bereken de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x}. \quad (8 \text{ pt})$$

9. Laat $P_n(x)$ het n -e orde Taylorpolynoom zijn van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ rond $x = 0$. Voor $|x| < 1$ en $n = 1, 2, \dots$ geldt dat

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

waarbij c tussen 0 en x ligt.

- Bereken $P_3(x)$. (5 pt)
- Toon aan dat

$$-\frac{5}{1024} < \frac{2}{\sqrt{5}} - P_2\left(\frac{1}{4}\right) < 0. \quad (6 \text{ pt})$$

10. Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y' - xy = \sqrt{x^2 + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}. \quad (10 \text{ pt})$$