OEFENOPGAVEN BIJ HET TENTAMEN ANALYSE 1 (COLLEGE NAJAAR 2006).

1. Bepaal alle oplossingen van de vergelijking

$$(z+2i)^4 = -16$$

in het complexe vlak.

2a. Schrijf het getal $2 - 2i\sqrt{3}$ in poolcoördinaten.

b. Bereken de rechthoekige coördinaten van het getal $(1-i)^{500}$.

3a. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

b. Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

4. Voor welke $c \in \mathbf{R}$ is de functie f_c gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^c} - 1 & \text{voor } x > 0 \\ 0 & \text{voor } x \leq 0 \end{cases}$$

continu op $\mathbf{R}$? En voor welke c is f_c differentieerbaar op $\mathbf{R}$?

5. Bepaal de vergelijking van de lijn die de grafiek van $y = e^{2x}$ raakt en door het punt $(2,0)$ gaat.

6. Bereken de hoek waaronder de kromme K met vergelijking $(x-2)^2 + 2y^2 = 6$ de positieve y-as snijdt.

7. Bereken

$$\text{a. } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2^x}{-2x^3+2^{x-3}}. \qquad \text{b. } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2^x}{-2x^3+2^{x-3}}.$$

$$\text{c. } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}. \qquad \text{d. } \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+1}+x.$$

$$\text{e. } \lim_{x\to 2} \ln \frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}. \qquad \text{f. } \lim_{x\downarrow 0} \sin x \ln x.$$

8. Bewijs m.b.v. de middelwaardestelling dat

$$e^x > 1 + x$$

als $x \neq 0$.

9a. Leg uit dat de functie $f(x) = x \ln x + 1$ op $[1/2, \infty)$ inverteerbaar is.

b. Bereken $(f^{-1})'(1)$.

10. Bewijs m.b.v. volledige inductie dat voor n een positief geheel getal

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\sqrt{5-2x}} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{(5-2x)^n \sqrt{5-2x}}.$$

11. Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn die de grafiek van $y = \ln|\sinh x|$ in het punt A met $x_A = -\ln 2$ loodrecht snijdt.

12a. Toon aan dat voor $x < 1/\sqrt{3}$

$$\arctan\left(\frac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}x}\right) = \arctan x + C$$

voor een zekere constante C en bepaal C.

b. Toon aan dat voor $x > 1/\sqrt{3}$

$$\arctan\left(\frac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}x}\right) = \arctan x + D$$

voor een zekere constante D en bepaal D.

13a. Onderzoek en schets de grafiek van $f(x) = \frac{x^2+3x+21}{x+4}$. (Bepaal snijpunten met de assen, extremen, asymptoten, gedrag in de randpunten van het domein).

b. Onderzoek en schets de grafiek van $g(x) = x\ln^2 x$. Geef ook de coördinaten van eventuele buigpunten.

14a. Bepaal het Taylorpolynoom $P_2(x)$ van orde 2 voor $\tan x$ rond $x = \pi/4$.

b. Benader $\tan \frac{7}{30}\pi$ m.b.v. P_2.

c. Toon aan dat

$$|\tan \frac{7}{30}\pi - P_2(\frac{7}{30}\pi)| \leq \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3.$$

15. Bereken de volgende limieten:

$$\text{a. } \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{2\cos x - 2 + x^2}. \qquad \text{b. } \lim_{x\to 0} (\sin^2 x)^x.$$

16. Het gebied V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 2x - x^2$ en de x-as. De lijn $\ell : y = (2-a)x$ verdeelt V in twee delen met gelijke oppervlakte. Bepaal a.

17. W is het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$, de x-as en de y-as.

a. Toon aan dat de oppervlakte van W gelijk is aan $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Gebruik partieel integreren. Je mag ook gebruiken dat $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

b. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door W om de x-as te wentelen.

c. Bereken de y-coördinaat van het zwaartepunt (de "centroïde") van W.

18. Bereken van de volgende volgende functies de primitieven:

a. $f_1(x) = \frac{\ln^3 x}{2x}$.

b. $f_2(x) = \arcsin x$.

c. $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$.

d. $f_4(x) = \frac{x^2+x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

e. $f_5(x) = \sin^4 x$.

19. Laat $I_n = \int_0^x \sin^n t dt$ zijn. Gebruik partieel integreren om I_n in I_{n-2} uit te drukken en bepaal aan de hand hiervan I_4.

20. Bereken de lengte van de kromme $y = 4x^2$ tussen de punten $(0, 0)$ en $(2, 16)$.

21. Het (tentvormige) vijfvlak $ABCD.EF$ heeft als grondvlak de rechthoek $ABCD$ met zijden $AB = 3, AD = 2$. De ribbe EF is evenwijdig aan AB, heeft lengte 1 en ligt op een afstand 1 boven het grondvlak. De overige ribben zijn AE, BF, CF en DE.

a. Toon aan dat de verticale doorsnede op een hoogte h vanaf het grondvlak (met $0 < h < 1$) een rechthoek is met oppervlakte $2(1-h)(3-2h)$.

b. Bereken de inhoud van het vijfvlak.

22. Los de volgende beginwaardeproblemen op:

a. $xy' - y = x\cos x,\ y(\pi) = \pi.$

b. $x^2y' = y,\ y(1) = 1.$

23. Bereken $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{x^2} e^{t^2}\,dt.$

24a. Bepaal de Taylorreeks van xe^x rond $x = 1$.

b. Bepaal de coëfficiënt van x^6 in de Taylorreeks van $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ rond $x = 0$. Wat is de convergentiestraal van deze Taylorreeks?

Antwoorden.

1. De vier oplossingen zijn

$$z = -2i + 2(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4), -2i + 2(\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4),$$
$$-2i + 2(\cos 5\pi/4 + i\sin 5\pi/4), -2i + 2(\cos 7\pi/4 + i\sin 7\pi/4),$$

dus

$$z = -2i + \sqrt{2}(1+i), -2i + \sqrt{2}(-1+i), -2i + \sqrt{2}(-1-i), -2i + \sqrt{2}(1-i).$$

2a. $2 - 2i\sqrt{3} = 4(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$.

b. $1 - i$ heeft modulus $\sqrt{2}$ en argument $-\pi/4$, dus $(1-i)^{500} = -2^{250}$.

3. $y(x) = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$.

b. Invullen geeft $A = 1$, $B = 0$ dus $y(x) = e^{2x}\cos x$.

4. Voor $c > 0$ is f_c continu, voor $c > 1$ is f_c differentieerbaar. Merk op dat f_c voor alle c differentieerbaar is buiten $x = 0$.

5. De vergelijking is $y = 2e^5(x-2)$.

6. Differentiëren geeft $2(x-2) + 4yy' = 0$. $x = 0, y = 1$ invullen geeft $y' = 1$ dus de hoek is 45°.

7. 8; 0; 1/3; -2; ln(3/5); 0.
Voor f gebruik de insluitstelling: $0 < \sin x < x$ voor $0 < x < \pi$ dus

$$0 = \lim_{x\downarrow 0} x\ln x \le \lim_{x\downarrow 0} \sin x \ln x \le \lim_{x\downarrow 0} 0 = 0.$$

8. Laat $f(x) = e^x - x - 1$, dan is

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) = e^c - 1 \begin{cases} > 0 & \text{voor } x > 0 \\ < 0 & \text{voor } x < 0 \end{cases},$$

waarbij c tussen 0 en x ligt. Conclusie: $f(x) > 0$ voor $x \neq 0$.

9. $f'(x) = 1 + \ln x$ dus $f'(x) > 0$ als $x > 1/2$. f is stijgend op $[1/2, \infty)$ en dus inverteerbaar.

b. $(f^{-1})'(1) = 1/(f'(y))\big|_{y=f^{-1}(1)} = 1/f'(1) = 1$.

10. Doen. Vergeet niet om ook het geval $n = 0$ (of $n = 1$) na te gaan.

11. Voor $x < 0$ is $y = \ln(-\sinh x)$ en dus is

$$y'(-\ln 2) = \frac{\cosh(-\ln 2)}{\sinh(-\ln 2)} = \frac{5/4}{-3/4} = -5/3.$$

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn op de grafiek is dus 3/5.

12. Voor $x < 1/\sqrt{3}$, resp. voor $x > 1/\sqrt{3}$ zijn $x \to \arctan x$ en $x \to \arctan\left(\frac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}x}\right)$ differentieerbare functies en hebben dezelfde afgeleide (nagaan), dus ze zijn op een constante na gelijk. Door een geschikte waarde in te vullen vind je $C = \pi/3$ en $D = -2\pi/3$.

13. $f'(x) = \dfrac{x^2+8x-9}{(x+4)^2}$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{25}{x+4}$. Snijpunt met de y-as is $(0, 21/4)$, geen snijpunt met de x-as. Minimum $f(1) = 5$, maximum $f(-9) = -15$. Asymptoten: $x = -4$ (verticaal) en $y = x - 1$ (scheve as.). Immers is

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x + 1) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{25}{x+4} = 0.$$

b. $g'(x) = \ln^2 x + 2\ln x$. Domein $x > 0$, Minimum $g(1) = 0$, maximum $g(1/e^2) = 4/e^2$. Geen snijpunten met de y-as, met de x-as $(1, 0)$ (raakpunt). Geen asymptoten, gedrag in $x = 0$:

$$\lim_{x\downarrow 0} x\ln^2 x = 0, \quad \lim_{x\downarrow 0} g'(x) = \lim_{x\downarrow 0} \ln x(\ln x + 2) = \infty.$$

De grafiek daalt dus naar het punt $(0, 0)$ met verticale raaklijn als x van rechts naar 0 gaat. $g''(x) = \dfrac{2\ln x + 2}{x}$; er is een buigpunt in $(1/e, 1/e)$. Immers $g''(1/e) = 0$ en $g''(x)$ verandert in $x = 1/e$ van teken.

14a. Laat $h(x) = \tan x$. Dan is $h'(x) = \tan^2 x + 1$, $h''(x) = 2\tan x(\tan^2 x + 1)$, $h'''(x) = (6\tan^2 x + 2)(\tan^2 x + 1)$. Het 2e-orde Taylorpolynoom rond $x = \pi/4$ is

$$P_2(x) = h(\frac{\pi}{4}) + h'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}h''(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})^2 = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2.$$

b. Een benadering van $\tan\frac{7\pi}{30}$ wordt gegeven door $P_2(\frac{7\pi}{30})$ en is gelijk aan $1 - \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{\pi^2}{1800}$. De fout wordt gegeven door $\frac{h'''(c)}{3!}(\frac{7\pi}{30} - \frac{\pi}{4})^3$ met $\frac{7\pi}{60} < c < \frac{\pi}{4}$. Een bovengrens voor de fout is dus ($h'''(c) < h'''(\pi/4) = 16$)

$$\left|h(\frac{7\pi}{30}) - P_2(\frac{7\pi}{30})\right| \le \left|\frac{h'''(c)}{3!}(\frac{-\pi}{60})^3\right| \le \frac{16\pi^3}{6\cdot 60^3}.$$

15a. Gebruik de Taylorreeks rond $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - x^2}{2\cos x - 2 + x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x - x^3/6 + O(x^5)) - x^2}{2(1 - x^2/2 + x^4/24 + O(x^6)) - 2 + x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/6 + O(x^6)}{x^4/12 + O(x^6)} = -2.$$

b. $(\sin^2 x)^x = e^{x\ln\sin^2 x}$. Nu is

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} x\ln(\sin^2 x) = \lim_{x\to 0} 2x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + 2x\ln x = 0 + 0 = 0$$

en dus is $\lim_{x\to 0}(\sin^2 x)^x = e^0 = 1$.

16. De inhoud van V is gelijk aan $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{4}{3}$. De snijpunten van ℓ met de grafiek van f zijn $(0, 0)$ en $(a, 2a - a^2)$. Dus moet gelden:

$$\frac{2}{3} = \int_0^a (2x - x^2 - (2 - a)x)dx = \frac{1}{6}a^3.$$

Dit geeft $a = \sqrt[3]{4}$.

17a. De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$. Na substitutie van $x = t^2$ wordt dit

$$\int_0^\infty 2t^2 e^{-t^2}dt = \int_0^\infty -t[e^{-t^2}]'dt = \lim_{a\to\infty} -te^{-t^2}\big|_0^a + \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

b. De oppervlakte van het omwentelingslichaam is gelijk aan (gebruik partieel integreren)

$$\pi\int_0^\infty xe^{-2x}dx = \pi\cdot\lim_{a\to\infty}(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})e^{-2x}\big|_0^a = \frac{1}{4}\pi.$$

c. Volgens de regel van Pappos is de inhoud van het omwentelingslichaam gelijk aan $2\pi y_Z$ maal de oppervlakte van W. Hierbij staat y_Z voor de y-coördinaat van het zwaartepunt van W. Volgens a en b is dus

$$2\pi y_z \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{4}\pi$$

en dus is $y_Z = \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}$.

18a. $\dfrac{1}{8}\ln^4 x$. (Immers is $\frac{1}{x} = [\ln x]'$.)

b. Partieel integreren geeft $x\arcsin x - \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$.

c. Substitutie van $t = x/2$ geeft

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \operatorname{arsinh} t + C = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C'.$$

d. Breuksplitsen geeft dat

$$f_4(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right).$$

Een primitieve is dus

$$\frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

e.

$$\sin^4 x = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x).$$

Een primitieve is dus

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

19. Voor $n > 1$ is

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int_0^x \cos^2 t\sin^{n-2} t dt = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

dus

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1} x \cos x.$$

Daar $I_0 = x$ volgt dat

$$I_4 = \frac{3}{4}I_2 - \frac{1}{4}\sin^3 x \cos x = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x \cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x \cos x.$$

20. De booglengte is gelijk aan $\int_0^2 \sqrt{1+y'(x)^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1+64x^2}dx = \frac{1}{8}\int_0^{16} \sqrt{1+t^2}dt$. Partieel integeren geeft

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} = t\sqrt{t^2+1} - \int \sqrt{t^2+1}dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

dus

$$\frac{1}{8}\int_0^{16} \sqrt{t^2+1}dt = \frac{1}{16}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{16}\text{arsinh}\, t\Big|_0^{16} = \sqrt{257} + \frac{1}{16}\ln(16+\sqrt{257}),$$

omdat arsinh $t = \ln(t+\sqrt{t^2+1})$.

21a. De doorsnede op hoogte h is een rechthoek (omdat evenwijdige vlakken een gegeven vlak snijden volgens evenwijdige lijnen) met zijden $2(1-h)$ en $3-2h$.

b. De inhoud is nu $\int_0^1 2(1-h)(3-2h)dh = \frac{7}{3}$.

22a. De oplossing van de homogene vergelijking $xy' = y$ (met scheiden van variabelen $[\ln|y|]' = 1/x$ is $y_h(x) = Cx$ met C een constante. Nu is x^{-1} een integrerende factor:

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \left(\frac{1}{x}y\right)' = \cos x.$$

Primitiveren geeft $y(x) = x\sin x + Cx$ met een constante C. Invullen van $y(\pi) = \pi$ geeft $C = 1$.

b. Scheiden van variabelen geeft $y'/y = [\ln|y|]' = 1/x^2$ dus $y(x) = Ce^{-1/x}$ en uit de randvoorwaarde volgt dat $C = e$.

23. Laat $F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$. Dan is

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} e^{t^2}dt \frac{d}{dx}(F(x^2) - F(2x)) = 2xF'(x^2) - 2F'(2x) = 2xe^{x^4} - 2e^{4x^2}.$$

24a.

$$xe^x = e\cdot((x-1)e^{x-1} + e^{x-1}) = e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!} + e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!} = e + e\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right).$$

b. Voor $|u| < 1$ geldt (binomiaalreeks) $(1+u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}u^n$. Laat nu $u = -9x^2$. Dan geldt voor $|9x^2| < 1$ (en dus voor $|x| < 1/3$) $(1-9x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-9x^2)^n$. De coëfficiënt van x^6 is dus

$$(-9)^3\binom{-1/2}{3} = -729 \cdot \frac{1}{3!} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} = \frac{3645}{16}.$$