

TENTAMEN ANALYSE 1.

maandag 15 januari 2007, 14.00-17.00.

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten: de eerste vier opgaven gaan over de stof van het eerste gedeelte van het college. De laatste vijf opgaven gaan over de stof van het tweede gedeelte van het college. Voor beide onderdelen wordt een cijfer gegeven. Het tentamencijfer bestaat voor 40% uit het cijfer van het eerste gedeelte en voor 60% uit het cijfer van het tweede gedeelte waarbij geldt dat het cijfer van het eerste gedeelte vervangen wordt door het cijfer van de toets van 23 oktober 2006 indien dit laatste hoger uitvalt. Tenslotte worden bij het tentamencijfer de bonuspunten van het huiswerk opgeteld.

Bij het tentamen mogen alleen rekenmachines worden gebruikt van het type dat op het VWO-examen is toegestaan. Het gebruik van een formulekaart is niet toegestaan.

Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.

1. Bepaal alle oplossingen in het complexe vlak van de vergelijking $(z + i)^3 = -512$. Geef tevens in een tekening de ligging van deze oplossingen aan. (10pt)

2. De functie $\operatorname{artanh} x$ (of $\tanh^{-1} x$) is de inverse van $\tanh x$.

a. Bepaal het domein D van $\operatorname{artanh} x$. (2 pt)

b. Laat zien dat voor $x \in D$

$$\operatorname{artanh} x = \ln R(x)$$

waarbij $R(x)$ een rationale functie is en bepaal $R(x)$. (8 pt)

3. De kromme K met vergelijking $xy^2 + e^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2$ gaat door het punt $(1, 1)$. Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan K in het punt $(1, 1)$. (10pt)

4. De functies $f_c : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zijn gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} x^c \sin x & \text{voor } x \neq 0 \\ 0 & \text{voor } x = 0 \end{cases}.$$

a. Ga na, voor welke c de functie f_c continu op \mathbf{R} is. (8pt)

b. Ga na, voor welke c de functie f_c differentieerbaar is in $x = 0$. Bepaal in de voorkomende gevallen $f'_c(0)$. (10 pt)

De opgaven 5-9 staan op de volgende bladzijde.

5. Beschouw de functie $h(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

- Bepaal de snijpunten van de grafiek van h met de coördinaatassen. (4pt)
- Bepaal de extremen van h en geef aan of het maxima dan wel minima zijn. (8pt)
- Bepaal een vergelijking van de asymptoten van de grafiek van h . (6pt)
- Schets op grond van de antwoorden van (a), (b) en (c) de grafiek van h . Geef duidelijk je werkwijze aan. (4pt)

6. Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{e^{x^2} - 1 - x^2}. \quad (8\text{pt})$$

7. Bereken

$$\int_1^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx. \quad (8\text{pt})$$

8a. Bepaal het eerste-en tweede-orde Taylorpolynoom $P_1(x)$ en $P_2(x)$ van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ rond $x = 8$. (5pt)

Voor $x > 0$ geldt dat

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - 8)^2$$

waarbij c tussen 8 en x ligt.

b. Toon aan dat

$$P_2(9) < \sqrt[3]{9} < P_1(9). \quad (5\text{pt})$$

9. Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(1) = 1 \end{cases}. \quad (10\text{pt})$$