ANALYSE 1, DEELTENTAMEN A.

maandag 23 oktober 2006, 11.00-13.00.

Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.

1. Bepaal alle complexe oplossingen van de vergelijking

$$(z+2)^6 = 64$$

(schrijf de oplossingen in de vorm $a + bi$ met a, b reële getallen) en teken ze in het complexe vlak.

2. Bereken de afgeleide van de functie

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

3. Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$$

4a. Bewijs dat de functie $f(x) = x^5 + x + 3$ inverteerbaar is.

b. Bereken $(f^{-1})'(3)$.

5. De krommen $x^2 + y^2 = x$ en $x^2 + y^2 = 2y$ snijden elkaar in twee punten. Toon aan dat in elk van de twee snijpunten de krommen elkaar loodrecht snijden.

6. Voor welke waarde(n) van $c \in \mathbf{R}$ is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-c} & \text{voor } x \neq c \\ -5 & \text{voor } x = c \end{cases}$$

continu op $\mathbf{R}$?

7. Beschouw de functie

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{voor } x \neq 0 \\ 0 & \text{voor } x = 0 \end{cases}.$$

a. Toon aan dat g in $x = 0$ differentieerbaar is en bepaal $g'(0)$.

b. Ga na of de afgeleide functie g' continu in $x = 0$ is.

Antwoorden.

1. De vergelijking $w^6 = 64$ heeft als oplossingen

$$w = 2(\cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}), \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

De oplossingen zijn dus

$$z = 0,\ z = -4,\ z = -1 - i\sqrt{3},\ z = -1 + i\sqrt{3},\ z = -3 + i\sqrt{3},\ z = -3 - i\sqrt{3}.$$

2.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right).$$

3. De algemene oplossing is gelijk aan $y(x) = (A + Bx)e^{-4x}$ met A, B constanten. Invullen van de beginvoorwaarden geeft $B = -A = e^4$ en de oplossing is dus

$$y(x) = (-e^4 + e^4 x)e^{-4x}.$$

4a. $f'(x) = 5x^4 + 1$ is positief voor alle x. f is een stijgende en dus een inverteerbare functie op $\mathbf{R}$.

b. $f(0) = 3$ dus $f^{-1}(3) = 0$. Dan is

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y=f^{-1}(3)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5\cdot 0^4 + 1} = 1.$$

5. De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(4/5, 2/5)$. Impliciet differentiëren geeft $2x+2yy' = 1$ resp. $2x+2yy' = 2y'$. In hetIn het punt $(4/5, 2/5)$ vinden we voor de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de twee krommen $y_1' = -3/4$, resp. $y_2' = 4/3$. Het product $y_1' \cdot y_2' = -1$ en de krommen snijden elkaar dus loodrecht. In het punt $(0, 0)$ vinden we voor de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de tweede kromme $y_2' = 0$. Voor de eerste kromme is $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{2y}$ ofwel $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{1-2x}$. Voor $x = y = 0$ is $\left(\frac{dx}{dy}\right)_1 = 0$ en de beide krommen snijden elkaar dus loodrecht.

6.

$$\lim_{x\to c} f_c(x) = \lim_{x\to c}\frac{(x-3)(x+2)}{x-c} = -5.$$

De limiet bestaat alleen als $c = 3$ of $c = -2$. Alleen $c = -2$ geeft als limiet -5. Merk verder nog op dat f_c continu is in $x \neq c$ voor alle c (een rationale functie is continu buiten de nulpunten van de noemer).

7a. Omdat

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

is volgens de insluitstelling

$$\lim_{x\to 0} -|x| \leq \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} |x|$$

en dus is

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Dan is

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

dus g is differentieerbaar in $x = 0$ met $g'(0) = 0$.

b. Voor $x \neq 0$ is

$$g'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Verder is

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0, \quad \text{maar} \quad \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} \quad \text{bestaat niet.}$$

g' is dus niet continu in $x = 0$.