# == Modeluitwerking tentamen Analyse 1 ==

Maandag 14 januari 2008, 14.00-17.00u

1.) (a) *Formuleer de Tussenwaardestelling.*

Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu is en $s \in \mathbb{R}$ ligt tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan bestaat er een $c \in [a, b]$ met $f(c) = s$.

(b) *Toon aan, dat de vergelijking* $\ln(x) = \sin(x)$ *minimaal één oplossing heeft.*

De functie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x - \sin x$ is continu. Te bewijzen: er bestaat $c$ met $f(c) = 0$. Merk op, dat de tussenwaardestelling niet direct toepasbaar is, omdat $(0, \infty)$ niet een gesloten interval is. Omdat

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

bestaan er $a > 0$ klein en $b$ voldoende groot, zodat $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. Je kunt expliciet bijvoorbeeld nemen $a = 1$ ($f(1) = -\sin 1 < 0$) en $b = e$ ($f(e) = 1 - \sin e > 0$). Volgens de tussenwaardestelling toegepast op $f$ op het interval $[a, b]$ volgt dat er een $c \in [a, b]$ moet bestaan waarvoor $f(c) = 0$.

2.) *Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!*

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(2n)!}$

Gebruik het quotiëntencriterium: We hebben

$$\begin{aligned} L := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(2n+2)!}}{\frac{n^3}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 \end{aligned}$$

Omdat $L < 1$ is de reeks absoluut convergent en dus ook convergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$

We hebben voor alle $n > 0$, dat $|\sin \frac{1}{n}| \le \frac{1}{n}$, dus

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \right| \le \frac{1}{n^2}.$$

De reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ is convergent, dus wegens het vergelijkingscriterium is de gevraagde reeks absoluut convergent en dus ook convergent.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{\ln n}}$

Omdat
$$a_n := \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{\ln n}} = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$$
hebben we een alternerende reeks. De rij $|a_n| = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ is positief en dalend voor $n \geq 2$ met limiet $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Met het criterium van Leibniz voor alternerende reeksen volgt dat de reeks convergent is. Met betrekking tot absolute convergentie:
$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \lim_{R\to\infty} \left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^R = \infty.$$
Het integralencriterium geeft dat de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ divergeert. De gegeven reeks convergeert dus niet absoluut: de reeks is voorwaardelijk convergent.

3.) *Beschouw de functie* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *gegeven door*
$$f(x) := \int_0^{\sqrt{\ln(x+1)}} e^{t^2} dt.$$

(a) *Beargumenteer, dat* $f$ *differentieerbaar is op* $(0, \infty)$ *en bereken* $f'$.

De hoofdstelling van de analyse (... van de integraal rekening) geeft, dat de functie
$$g : y \mapsto \int_0^y e^{t^2} dt$$
differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en $g'(y) = e^{y^2}$. Verder is $x \mapsto \sqrt{x}$ differentieerbaar op $(0, \infty)$. Bovendien, $\ln(1 + x) > 0$ voor $x > 0$, dus
$$h(x) := \sqrt{\ln(1 + x)}$$
is gedefinieerd en differentieerbaar op $(0, \infty)$. Omdat $f(x) = g(h(x))$, is $f$ differentieerbaar op $(0, \infty)$ als samenstelling van differentieerbare functies. De kettingregel geeft
$$\begin{aligned} f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) &= e^{\sqrt{\ln(1+x)}^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(1 + x)}} \cdot \frac{1}{1 + x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(1 + x)}} \end{aligned}$$

(b) *Bewijs dat* $f$ *concaaf is op* $[0, \infty)$.

$f$ is concaaf op $[0, \infty)$ als $f'$ dalend is op $(0, \infty)$. Op $(0, \infty)$ is $x \mapsto \ln(1+x)$ stijgend en positief, dus $x \mapsto \sqrt{\ln(1 + x)}$ is gedefinieerd en stijgend. Dus $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}}$ is dalend op $(0, \infty)$.

Je kunt ook gebruiken, dat $f$ concaaf is op $[0,\infty)$ wanneer $f''(x)$ negatief is op $(0,\infty)$. Dit laatste volgt uit

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(\ln(1+x))^{3/2}} \cdot \frac{1}{x+1} < 0$$

voor $x > 0$.

4.) *Bereken*

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, e^{-\sin\theta} d\theta$$

Gebruik de substitutie $u = \sin\theta$ (en $du = \cos\theta\, d\theta$) en partieel integreren:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, e^{-\sin\theta} d\theta &= \int_0^1 ue^{-u} du \\
&= \left[-ue^{-u}\right]_0^1 \;-\; -\int_0^1 e^{-u} du \\
&= -e^{-1} + \left[-e^{-u}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} \;-\; \frac{1}{e} \;+\; 1 = 1 - \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{3x^2 - x + 2}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

Breuksplitsen toepassen: zoek $A$, $B$ en $C$ in $\mathbb{R}$ zodat

$$\frac{3x^2 - x + 2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} \;+\; \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

De laatste breuk samennemen geeft

$$\frac{A}{x+1} \;+\; \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + (B+C)x + C}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Dus $A + B = 3$, $B + C = -1$ en $A + C = 2$. Oplossen geeft $A = 3$, $B = 0$ en $C = -1$. Dan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x^2 - x + 2}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \int_0^1 \frac{3}{x+1} \;-\; \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \left[3\ln|x+1| \;-\; \arctan x\right]_0^1 \\
&= 3\ln 2 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(c) *en de oneigenlijke integraal*

$$\int_0^1 \ln(x^2 - x^4)dx.$$

De integraal is oneingelijk zowel naar de grens 0 als naar 1. Dus per definitie, voor een $c \in (0,1)$ (bijvoorbeeld $c = \frac{1}{2}$):

$$\int_0^1 \ln(x^2 - x^4)dx = \lim_{a\downarrow 0} \int_a^c \ln(x^2 - x^4)dx + \lim_{b\uparrow 1} \int_c^b \ln(x^2 - x^4)dx.$$

Je mag ook nemen

$$\int_0^1 \ln(x^2 - x^4)dx = \lim_{a\downarrow 0} \lim_{b\uparrow 1} \int_a^b \ln(x^2 - x^4)dx,$$

maar NIET

$$\int_0^1 \ln(x^2 - x^4)dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \ln(x^2 - x^4)dx!$$

('De grenzen moeten onafhankelijk van elkaar naar de randwaarde kunnen convergeren'). We vinden (met $c = \frac{1}{2}$ genomen):

$$\begin{aligned}
\int_a^{1/2} \ln(x^2 - x^4)dx &= \int_a^{1/2} \ln\big(x^2(1+x)(1-x)\big)dx \\
&= \int_a^{1/2} 2\ln x + \ln(1+x) + \ln(1-x)dx \\
&= \Big[\ 2(x\ln x - x)\ +\ \big[(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\big] \\
&\quad -\ \big[(1-x)\ln(1-x) - (1-x)\big]\ \Big]_a^{1/2}
\end{aligned}$$

en een vergelijkbare uitdrukking voor de integraal over $[\frac{1}{2}, b]$. Samen geeft dit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(x^2 - x^4)dx &= \lim_{b\uparrow 1} \Big[2(b\ln b - b)\ +\ \big[(1+b)\ln(1+b) - (1+b)\big] \\
&\quad -\ \big[(1-b)\ln(1-b) - (1-b)\big]\Big] \\
&\quad -\ \lim_{a\downarrow 0} \Big[2(a\ln a - a)\ +\ \big[(1+a)\ln(1+a) - (1+a)\big] \\
&\quad -\ \big[(1-a)\ln(1-a) - (1-a)\big]\Big] \\
&= \big[-2 + (2\ln 2 - 2) - 0\big]\ -\ \big[0 - 1 - (-1)\big] = 2\ln 2 - 4.
\end{aligned}$$

5.) (a) *Bewijs dat de Taylorreeks rond het punt 2 van de functie* $\ln x$ *gegeven wordt door*

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n, \tag{1}$$

*en bepaal de convergentiestraal (rond $x = 2$).*

De (formele) Taylorreeks van $f(x) = \ln x$ rond het punt 2 wordt gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n.$$

We berekenen eerst een uitdrukking voor de afgeleiden functies $f^{(n)}$ en de bijbehorende functiewaarde in 2:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & \Rightarrow \quad & f(2) = \ln 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{x} & \Rightarrow \quad & f'(2) = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= \frac{-1}{x^2} & \Rightarrow \quad & f''(2) = -\frac{1}{4} \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} & \Rightarrow \quad & f^{(n)}(2) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2^n}
\end{aligned}$$

Invullen in de algemene uitdrukking voor de Taylorreeks geeft

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n = \ln 2 \; + \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

(b) *Laat $T_n(x)$ het $n$-de orde Taylorpolynoom zijn van de functie $\ln x$ rond $x = 2$. Laat zien, dat voor de restterm $R_n(x) = \ln x - T_n(x)$ geldt*

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1} \qquad \text{voor alle } x: \; |x-2| < 1,$$

*en concludeer dat voor $|x - 2| < 1$ de functie $\ln x$ gelijk is aan de reeks (1).*

Gebruik de Lagrange uitdrukking voor de restterm: er bestaat $c$ tussen $x$ en 2 zodat

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-2)^{n+1}.$$

Dus

$$|R_n(x)| = \frac{n!}{(n+1)!c^{n+1}} |x-2|^{n+1} = \frac{1}{n+1} \, \frac{|x-2|^{n+1}}{c^{n+1}}.$$

Als $|x - 2| < 1$, dan is $x > 1$ en dus $c > 1$. We vinden, dat

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \, \frac{1^{n+1}}{1^{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Hieruit volgt, dat voor iedere $x$ met $|x - 2| < 1$, $R_n(x) \to 0$ als $n \to \infty$. De Taylorreeks convergeert dus naar $\ln x$ voor deze $x$.

(c) *Bereken*

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x/2)}{(x-2)^2}-\frac{1}{2x-4}\right).$$

Gebruik alleereerst, dat

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x/2)}{(x-2)^2}-\frac{1}{2x-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2(\ln x-\ln 2)-(x-2)}{2(x-2)^2}\right)$$

en substitueer dan het tweede-orde Taylorpolynoom van $\ln x$ rond 2 plus restterm (dit is geoorloofd, omdat wanneer $x\to 2$, $|x-2|<1$ voor $x$ voldoende dicht bij 2 – de Taylorreeks convergeert naar $\ln x$):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x/2)}{(x-2)^2}-\frac{1}{2x-4}\right)&=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2\left(\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+R_2(x)\right)-(x-2)}{2(x-2)^2}\right)\\&=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{8}+\frac{R_2(x)}{(x-2)^2}\right)=-\frac{1}{8},\end{aligned}$$

omdat $R_2(x)=\mathcal{O}\big((x-2)^3\big)$ voor $x\to 2$ (zie Lagrange uitdrukking voor $R_2(x)$).

Je kunt ook l'Hôpital gebruiken:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x/2)}{(x-2)^2}-\frac{1}{2x-4}\right)&=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x/2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2(x-2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{2(x-2)}=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

| Opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Punten | 1+2 | 2+2+2 | 2+2 | 2+2+3 | 3+2+2 |