

# == Tentamen Analyse 1 ==

Maandag 14 januari 2008, 14.00-17.00u

---

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille, O. van Gaans) en je studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

**Succes!**

---

- 1.) (a) Formuleer de Tussenwaardestelling.  
(b) Toon aan, dat de vergelijking  $\ln(x) = \sin(x)$  minimaal één oplossing heeft.
- 2.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(2n)!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}, \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{\ln n}}.$$

- 3.) Beschouw de functie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door

$$f(x) := \int_0^{\sqrt{\ln(x+1)}} e^{t^2} dt.$$

- (a) Beargumenteer, dat  $f$  differentieerbaar is op  $(0, \infty)$  en bereken  $f'$ .
  - (b) Bewijs dat  $f$  concaaf is op  $[0, \infty)$ .
- 4.) Bereken

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta e^{-\sin \theta} d\theta, \quad (b) \int_0^1 \frac{3x^2 - x + 2}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

en de oneigenlijke integraal

$$(c) \int_0^1 \ln(x^2 - x^4) dx.$$

**\*\*\* Zie ommezijde voor vervolg \*\*\***

5.) (a) Bewijs dat de Taylorreeks rond het punt 2 van de functie  $\ln x$  gegeven wordt door

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( \frac{x-2}{2} \right)^n, \quad (1)$$

en bepaal de convergentiestraal (rond  $x = 2$ ).

(b) Laat  $T_n(x)$  het  $n$ -de orde Taylorpolynoom zijn van de functie  $\ln x$  rond  $x = 2$ . Laat zien, dat voor de restterm  $R_n(x) = \ln x - T_n(x)$  geldt

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1} \quad \text{voor alle } x : |x-2| < 1,$$

en concludeer dat voor  $|x-2| < 1$  de functie  $\ln x$  gelijk is aan de reeks (1).

(c) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\ln(x/2)}{(x-2)^2} - \frac{1}{2x-4} \right).$$

Opgave	1	2	3	4	5
Punten	1+2	2+2+2	2+2	2+2+3	3+2+2