# == Tentamen Analyse 1 ==

Maandag 12 januari 2009, 14.00-17.00u

---

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille of O. van Gaans) en je studierichting.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

---

1.) Bekijk de functie $f\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = |x^3 - 3x^2|, \quad x \in [-1,\infty).$$

Bepaal plaats, aard en grootte van de extremen van $f$.

2.) Voor welke waarde(n) van $c$ ($c > 0$) snijden de ellips $x^2 + 3y^2 = 2$ en de hyperbool $x^2 - cy^2 = 1$ elkaar onder een rechte hoek?

3.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} 2^n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks:

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n-1)} x^n.$$

4.) Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal:

$$\text{(a)} \quad \int_1^2 x^3 \ln x \, dx, \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{3x-5}{x^2-4x+3} \, dx,$$

$$\text{(c)} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+4} \, dx.$$

***** Zie ommezijde voor vervolg *****

5.) Bekijk de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\[2ex] 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat $f$ differentieerbaar is in 0 en bepaal $f'(0)$.

(b) Is $f$ continu in $x = 0$? Beargumenteer!

(c) Toon aan dat $f$ strict stijgend is op $\mathbb{R}$.

(d) Toon aan dat de functie $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$G(x) = \int_0^x f(t^2)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

een buigpunt heeft in $x = 0$. Geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

(e) Geef het derdegraads Taylorpolynoom van $e^x$ rond 0 en geef een formule voor de Lagrange restterm.

(f) Toon aan dat

$$0 \leq f(x) - 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}x^2 \leq \tfrac{e}{24}x^3 \quad \text{voor alle } x \in (0, 1].$$

(g) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(|x|) - 1 - \frac{1}{2}|x|}{x^2}.$$

| Opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Punten: | 8 | 6 | 9 | 10 | 17 |
| | (8) | (6) | (2+3+4) | (3+3+4) | (3+1+4+3+2+1+3) |

1. Er geldt $f(x) = |x^2(x-3)|$, dus $f(x) = x^2(x-3)$ voor $x \geq 3$ en $f(x) = x^2(3-x)$ voor $x < 3$.
Voor $x > 3$ is $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ en dus $f'(x) = 0$ voor $x = 0$ en $x = 2$. Deze twee punten zijn niet $> 3$ dus dit levert geen stationaire punten.
Voor $x < 3$ is $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$ en $f'(x) = 0$ levert de stationaire punten $x = 0$ en $x = 2$.
Er is een randpunt in $x = -1$ en mogelijk een singulier punt in $x = 3$.
Het tekenschema van $f'$ is als volgt:

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
-1 & & 0 & & 2 & & 3 & & & x \\
\hline
| & --- & 0 & +++ & 0 & --- & * & +++++ & & f'(x)
\end{array}$$

De extremen van $f$ zijn dus
$x = -1$: maximum, $f(-1) = 4$
$x = 0$: minimum, $f(0) = 0$
$x = 2$: maximum, $f(2) = 4$
$x = 3$: minimum, $f(3) = 0$.
Omdat $f(x)$ naar $+\infty$ gaat als $x$ naar $\infty$ gaat, zijn de twee maxima lokaal en de twee minima globaal.

2. We zoeken de waarden van $c$ waarvoor er een punt $(x, y)$ bestaat dat zowel op de ellips als op de hyperbool ligt en waar de raaklijnen van de ellips en hyperbool loodrecht op elkaar staan. De richtingscoëfficiënten van de raaklijnen vinden we door impliciet differentiëren:
$2x + 6yy' = 0$ ofwel $y' = \frac{-x}{3y}$ (mits $y \neq 0$) en
$2x - 2cyy' = 0$ ofwel $y' = \frac{x}{cy}$ (mits $y \neq 0$).
De raaklijnen staan loodrecht op elkaar als het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan $-1$, ofwel

$$\frac{-x}{3y}\frac{x}{cy} = -1 \text{ ofwel } -\frac{x^2}{3cy^2} = -1.$$

Als we de vergelijkingen voor de ellips en hyperbool optellen vinden we

$$(3+c)y^2 = 1$$

(dus $y = 0$ voldoet niet) en als we 3 maal de vergelijking voor de hyperbool van de vergelijking voor de ellips aftrekken vinden we

$$(3+c)x^2 = 2c + 3.$$

Als we dit invullen krijgen we

$$-1 = -\frac{x^2}{3cy^2} = -\frac{2c+3}{3+c}\frac{3+c}{3c} = -\frac{2c+3}{3c}$$

ofwel

$$2c + 3 = 3c \text{ ofwel } c = 3.$$

Met $c = 3$ volgt

$$6y^2 = 1 \text{ en } 6x^2 = 9$$

en dus $y = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$ en $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$.
Door in te vullen zien we dat deze $x$ en $y$ inderdaad aan alle voorwaarden voldoen. Dus $c = 3$ voldoet en dit is de enige waarde waarde van $c$ die voldoet.

3.
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}2^{n+1}}{\frac{n+1}{n!}2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}\frac{n!}{(n+1)!}2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2}2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})^2}2 = 0 < 1$, dus met het quotiëntencriterium (ratio test) vinden we dat de reeks absoluut convergent is en dus convergent.
(b) Dit is een alternerende reeks. Omdat $\sqrt{}$ een stijgende functie is, is $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, dus de rij $\frac{1}{\sqrt{n}}$ is dalend. Verder is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Volgens de stelling van Leibnitz voor alternerende reeksen volgt dat de reeks convergent is. Omdat $\frac{1}{2} \leq 1$ is de reeks $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}}$ niet convergent ("$p$-test"). De reeks is dus niet absoluut convergent en alleen voorwaardelijk convergent.
(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$. Volgens de wortelformule voor de convergentiestraal is de convertentiestraal gelijk aan $\frac{1}{\frac{1}{e}} = e$.

4.
(a) Met partiële integratie

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3 \ln x\, dx &= \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^2 = \frac{16}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 1 - \frac{16}{16} + \frac{1}{16} \\ &= 4\ln 2 - 1 + \frac{1}{16} = 4\ln 2 - \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

(b) $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\, dx = \int \frac{3x-5}{(x-3)(x-1)}\, dx$. We proberen de breuk te splisten in

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-1)(x-3)}.$$

De teller is gelijk aan $(A+B)x - A - 3B$. Dit moet gelijk zijn aan $3x-5$ voor alle $x$, dus $A+B = 3$ en $A+3B = 5$. Oplossen geeft $A = 2$ en $B = 1$. De gevraagde integraal is dus gelijk aan

$$= \int \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1}\, dx = 2\ln|x-3| + \ln|x-1| + C.$$

(c) De oneigenlijke integraal is per definitie een limiet en we gebruiken de substitutie $u = e^x$ met $du = e^x dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+4}\, dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^x}{(e^x)^2+4}\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_{x=0}^{x=b} \frac{1}{u^2+4}\, du \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{x=0}^{x=b} \frac{1/4}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\, du = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5.(a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-h}{h^2} = \frac{1+h+\frac{1}{2}h^2+O(h^3)-1-h}{h^2} = \frac{1}{2},$$

dus $f$ is differentieerbaar in 0 en $f'(0)=\frac{1}{2}$. (De limiet kan ook gemakkelijk met de regel van de l'Hôpital uitgerekend worden).
(b) Uit (a) volgt dat $f$ ook continu is in $x=0$.
(c) Voor $x\neq 0$ is $f$ differentieerbaar in $x$ en

$$f'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}.$$

Voor $x\neq 0$ geldt ook $e^x > 1+x$, dus $e^{-x} > 1-x$ voor alle $x\neq 0$ en dus $x-1 > -e^{-x}$. Daarom voor $x\neq 0$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x+1}{x^2} > \frac{-e^{-x}e^x+1}{x^2} = 0.$$

Hieruit volgt dat $f$ strict stijgend is.
(d) Als combinatie van continue functies is $f$ continu op $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Volgens (b) is $f$ dus continu op heel $\mathbb{R}$. Dan is de samenstelling $t\mapsto f(t^2)$ ook continu. Volgens de hoofdstelling van de integraalrekening is $G$ daarom differentieerbaar op $\mathbb{R}$ en

$$G'(x) = f(x^2) \text{ voor alle } x\in\mathbb{R}.$$

Met de kettingregel volgt dat

$$G''(x) = 2f'(x^2)x \text{ voor alle } x\in\mathbb{R}.$$

Uit (c) volgt nu dat $G''(x) < 0$ voor $x<0$ en $G''(x) > 0$ voor $x>0$. Dus $G$ is strict concaaf op $(-\infty,0]$ en strict convex op $[0,\infty)$ en dus heeft $G$ een buigpunt in $x=0$.
(e) $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}e^cx^4$, waar $c$ een punt tussen 0 en $x$ is.
(f) Als $x\in(0,1]$ dan is $c\in(0,1)$, dus $0\le\frac{1}{24}e^cx^4\le\frac{e}{24}x^4$. Dan

$$0\le e^x-1-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{6}x^3\le\tfrac{e}{24}x^4,$$

dus $0\le f(x)-1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2\le\frac{e}{24}x^3$.
(g) Uit (f) volgt voor $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$:

$$0\le f(|x|)-1-\tfrac{1}{2}|x|-\tfrac{1}{6}x^2\le\tfrac{e}{24}|x|^3,$$

dus

$$0\le\frac{f(|x|)-1-\frac{1}{2}|x|}{x^2}-\frac{1}{6}\le\frac{e}{24}|x|.$$

Met de insluitstelling volgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(|x|)-1-\frac{1}{2}|x|}{x^2}-\frac{1}{6}=0$$

en daarom

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(|x|)-1-\frac{1}{2}|x|}{x^2}=\frac{1}{6}.$$