Tussentoets Analyse 1

Maandag 20 oktober 2008, 10.00 - 12.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille, O. van Gaans) en je studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **twee** opgaven.

Succes!

---

1. Beschouw de functie gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-4}{2x-3}, & \text{voor } x \geq 0,\ x \neq \frac{3}{2}, \\ 2 - \frac{2}{3}e^x, & \text{voor } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Bepaal de horizontale, verticale en scheve asymptoot van f.

   (b) Laat zien, dat f continu is in 0.

   (c) Laat zien, dat f niet differentieerbaar is in 0.

   (d) Bepaal de aard (minimum, maximum, lokaal, globaal), plaats en grootte van de extremen van f.

2. Beschouw de functie g gegeven door

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

   (a) Beargumenteer, dat g gedefinieerd is op heel $\mathbb{R}$ en dat g op dit domein continu is.

   (b) Laat zien dat g strict stijgend is op $\mathbb{R}$.

   (c) Bepaal op welke intervallen g convex of concaaf is en bepaal de buigpunten van g.

   (d) Laat zien dat
$$\lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2+1} = 0.$$

   (e) Bepaal het bereik van g.

   (f) Bereken de inverse functie g^{-1}.
   (Hint: gebruik dat $(e^{g(x)} - x)^2 = x^2 + 1$)

[1](a)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2-\frac{2}{3}e^x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(2-\frac{2}{3}e^{-x}) = 2-\frac{2}{3}\cdot 0 = 2.$$

Dus $y=2$ is een horizontale asymptoot van f voor $x\to-\infty$.
Voor grote positieve x is

$$f(x) = \frac{2x^2-4}{2x-3} = \frac{x(2x-3)+3x-4}{2x-3} = x+\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{2x-3}.$$

Dus

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(x+\tfrac{3}{2})\right) = \lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{2}\frac{1}{2x-3} = 0$$

en daarom is $y = x+\frac{3}{2}$ een scheve asymptoot van f voor $x\to\infty$.
Verder is $\lim\limits_{x\downarrow\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2-4}{2x-3} = +\infty$ en $\lim\limits_{x\uparrow\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2-4}{2x-3} = -\infty$. Dus $x=\frac{3}{2}$ is een verticale asymptoot van f voor $x\downarrow\frac{3}{2}$ en $x\uparrow\frac{3}{2}$.

(b) De functie $x\mapsto\frac{2x^2-4}{2x-3}$ is een rationale functie, dus continu op zijn domein $\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$. Hieruit volgt dat

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\frac{2x^2-4}{2x-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Ook geldt $f(0)=\frac{4}{3}$. Verder,

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\left(2-\frac{2}{3}e^x\right) = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

want $x\mapsto 2-\frac{2}{3}e^x$ is continu op $\mathbb{R}$.
Dus $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = f(0)$ en dus is f continu in $x=0$.

(c) De rechterlimiet van het differentiequotient in 0 is

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\frac{2h^2-4}{2h-3}-\frac{4}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\downarrow 0}\frac{3(2h^2-4)-4(2h-3)}{3(2h-3)h}$$
$$= \lim_{h\downarrow 0}\frac{6h^2-8h}{6h^2-9h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{6h-8}{6h-9} = \frac{8}{9}.$$

De linkerlimiet van het differentiequotient in 0 is

$$\begin{aligned}
\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\uparrow 0} \frac{(2-\frac{2}{3}e^h)-\frac{4}{3}}{h} \\
&= \lim_{h\uparrow 0} \frac{2}{3} 1 - e^h h = \lim_{h\uparrow 0} -\frac{2}{3}\frac{e^h-1}{h} \\
&= -\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x\bigg|_{x=0} = -\frac{2}{3}e^0 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Deze twee limieten zijn niet gelijk, dus f is niet differentieerbaar in 0.
ALTERNATIEF ARGUMENT: De functies $x \mapsto \frac{2x^2-4}{2x-3}$ en $x \mapsto 2-\frac{2}{3}e^x$ zijn beide differentieerbaar in 0. Dus

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x^2-4}{2x-3}\bigg|_{x=0} = \frac{4x^2-12x+8}{(2x-3)^2}\bigg|_{x=0} = \frac{8}{9}$$

en

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(2-\frac{2}{3}e^x\Big)\bigg|_{x=0} = -\frac{2}{3}.$$

Deze zijn niet gelijk en f is dus niet differentieerbaar in 0.
NOG EEN ALTERNATIEF ARGUMENT: De functies $x \mapsto \frac{2x^2-4}{2x-3}$ en $x \mapsto 2-\frac{2}{3}e^x$ hebben beide afgeleiden die continu zijn op een open interval om 0. De rechterlimiet van het differentiequotient van f in 0 is dus gelijk aan $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$ en de linkerlimiet gelijk aan $\lim_{x\uparrow 0} f'(x)$. Voor $x > 0$ hebben we

$$f'(x) = \frac{4x^2-12x+8}{(2x-3)^2}$$

en voor $x < 0$ hebben we

$$f'(x) = -\frac{2}{3}e^x.$$

We vinden dus $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \frac{8}{9}$ en $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = -\frac{2}{3}$. Deze zijn niet gelijk, dus f is niet differentieerbaar in 0.

(d) We bepalen eerst de kritieke punten en de singuliere punten. Randpunten zijn er niet. Voor $x > 0$ is

$$f'(x) = \frac{4x^2-12x+8}{(2x-3)^2} \text{ voor } x \neq \frac{3}{2},$$

dus

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2-3x+2=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-2)(x-1)=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x=1 \text{ of } x=2.
\end{aligned}$$

Omdat de noemer van de formule voor $f'(x)$ altijd positief is zien we dat $f'(x)$ kleiner dan nul is tussen 1 en 2 (maar niet bestaat in $x = 3/2$) en groter dan nul tussen 0 en 1 en rechts van 2. Er is dus
een lokaal maximum in $x = 1$ en $f(1) = 2$,
een lokaal minimum in $x = 2$ en $f(2) = 4$.
De extremen zijn niet globaal, want we hebben al gezien dat $\lim_{x\downarrow\frac{3}{2}} f(x) = +\infty$ en $\lim_{x\uparrow\frac{3}{2}} f(x) = -\infty$.
Voor $x < 0$ is $f'(x) = -\frac{3}{2}e^x$ en $-\frac{3}{2}e^x = 0$ heeft geen oplossingen. Er zijn dus geen extremen op $(-\infty, 0)$.
f heeft een singulier punt in $x = 0$. Links van 0 is $f'(x) = -\frac{3}{2}e^x < 0$ en rechts van 0 is (zie boven) $f'(x) > 0$. f heeft dus
een lokaal minimum in 0 en $f(0) = \frac{4}{3}$.

[2](a) Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$. Dus $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ is gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$. g is een samenstelling van continue functies en dus continu.
(b) We berekenen

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

We zien dat $g'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dus g is strict stijgend op $\mathbb{R}$.
(c) $g''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}2x = \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
De noemer is altijd > 0 dus $g''(x) < 0$ voor $x > 0$ en $g''(x) > 0$ voor $x < 0$. Hieruit volgt dat g strict convex is op $(-\infty, 0]$ en strict concaaf op $[0, \infty)$. In 0 is er dus een buigpunt.
(d) Met de worteltruc vinden we

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) &= \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{neem } y=-x \\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = 0 \end{aligned}$$

(want $y + \sqrt{y^2+1} \to \infty$ als $y \to \infty$).
(e) We hebben dat $\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$ en $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 0$. Omdat

$$\lim_{y\to\infty} \ln y = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{y\downarrow 0} \ln y = -\infty$$

volgt dat

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

Omdat g continu is neemt g dus alle waarden aan tussen $-\infty$ en $+\infty$ (wegens de Tussenwaardestelling). Het bereik van g is dus $\mathbb{R}$.
(f) Laat $y = g(x)$. We proberen x op te lossen. Uit $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ volgt $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Door de hint komen we op het idee dit om te werken tot $e^y - x = \sqrt{x^2+1}$ ofwel $(e^y - x)^2 = x^2 + 1$. Haakjes uitwerken geeft

$$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1$$

ofwel $e^{2y} - 2xe^y = 1$. Dit is een lineaire vergelijking in x die we oplossen door om te schrijven tot $-2xe^y = 1 - e^{2y}$ en delen door $-2e^y$ geeft

$$x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Er geldt dus

$$g^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$