

# Tentamen Analyse 1

Maandag 10 januari 2011, 14:00-17:00 uur

---

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
  - Er zijn **vijf** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
  - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
  - Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, dat van een formulekaart niet. Bedenk wel dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat.
- 

- 1.) De functie  $f$  heeft als domein de vereniging van de intervallen  $(-\infty, -1)$  en  $(-1, \infty)$  en is daar gegeven door het voorschrift

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}, & \text{voor } x \leq 1, x \neq -1, \\ \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 1}, & \text{voor } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Is  $f$  continu in 1? Beargumenteer het antwoord.
- (b) Bepaal de afgeleide van  $f$  op zijn domein, behalve in het punt  $x = 1$ .
- (c) Is  $f$  differentieerbaar in 1? Beargumenteer het antwoord.
- (d) Bepaal alle asymptoten (horizontaal, verticaal, schuin) van  $f$ .
- (e) Toon aan dat  $f$  strikt dalend is op  $[1, \infty)$ .
- (f) Bepaal alle extrema van  $f$  op zijn domein. Geef niet alleen plaats en grootte, maar vermeld ook of het om een maximum of een minimum gaat en of het betreffende extremum lokaal of globaal (absoluut) is.
- 2.) Beargumenteer of de volgende reeksen absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen gebruikt worden.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin(n),$$

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n},$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

**Zie ommezijde**

3.) (a) Toon aan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + 2n + 2)}{\ln(n^2 + 1)} = 1.$$

(b) Bepaal de verzameling van alle  $x$  waarvoor de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2 + 1)}{e^n} x^n$$

convergeert.

4.) Bereken de volgende bepaalde dan wel onbepaalde integralen:

(a)

$$\int (\ln x)^2 dx,$$

(b)

$$\int_1^4 \frac{2x^2 - x + 20}{x^3 - 2x^2 + 10x} dx,$$

(c)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}} dx.$$

5.) Laat  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven zijn door  $f(x) = xe^x$ . Merk op dat  $f(1) = e$ . Laat  $B$  het bereik zijn van  $f$ .

(a) Toon aan dat  $f: (-1, \infty) \rightarrow B$  inverteerbaar is.

Laat  $g$  de inverse functie van  $f$  zijn.

(b) Bepaal expliciet het domein van  $g$ .

(c) Bereken  $g'(e)$ .

(d) Bepaal het tweede orde Taylorpolynoom van  $g$  rond  $e$ .

---

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	27	19	12	25	17	100
	(3+3+3+6+4+8)	(5+7+7)	(4+8)	(7+10+8)	(4+4+4+5)	