Tussentoets - Analyse II - Wiskunde

Woensdag 13 april 2016 - zaal B1/B2/B3 Snellius - 11.00-13.00

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

Deze toets bestaat uit *vier* opgaven.

Opgave 1 Laat $\mathcal{C}$ de gesloten, enkelvoudige, stuksgewijs C^1-gladde kromme zijn in het eerste kwadrant van $\mathbb{R}^2$ die loopt over gedeeltes van de lijn $y = \frac{3}{2}x$, de ellips $9x^2 + 4y^2 = 9$, de lijn $x = 0$ en de ellips $9x^2 + 4y^2 = 36$, met de klok mee. Laat het vectorveld $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven zijn door

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^3} - 4y^3 \\ \cos(y^3) + 9x^3 \end{pmatrix}.$$

Bereken de vector-lijnintegraal $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$.

Opgave 2 Beschouw voor een parameter $a \in \mathbb{R}$ het vectorveld

$$\vec{F}_a(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 e^{x^3+y^4+\cos(\pi z^5)} + axy \\ 4y^3 e^{x^3+y^4+\cos(\pi z^5)} + x^2 + 4y^3 \ln(z) \\ -5\pi z^4 \sin(\pi z^5) e^{x^3+y^4+\cos(\pi z^5)} + \frac{y^4}{z} \end{pmatrix}.$$

(a) Bereken $\operatorname{div} \vec{F}_a$.

(b) Bereken $\operatorname{curl} \vec{F}_a$.

(c) Bereken de vector-lijnintegral $\int_C \vec{F}_a \cdot d\vec{R}$ voor $a = 0$, waarbij C het pad van $(0,0,1)$ naar $(1,4,2)$ is dat ontstaat door de twee lijnsegmenten

$$(0,0,1) \to (13,4,2016), \qquad (13,4,2016) \to (1,4,2)$$

achtereenvolgens te doorlopen.

Opgave 3 Bereken de dubbele integraal

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[4]{x}} \cos\left(5\pi y^{3/2} - \frac{3}{2}\pi y^5\right) dy\, dx.$$

Opgave 4 Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die wordt gegeven door

$$f(x,y) = \sqrt{3x^2 + y^2},$$

samen met de ellips

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 = 4\}$$

en het punt $P(1,1)$.

(a) Gebruik de lineaire benadering van f rond P om $f(1.1, 0.9)$ te benaderen met een breuk.

(b) Bepaal de richtingsafgeleide van f die je ervaart in het punt P als je over de ellips $\mathcal{E}$ loopt met de klok mee.

(c) Bewijs dat de functie $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$g_\alpha(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0), \\ \frac{f(x,y)^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

differentieerbaar is in $(0,0)$ als $\alpha > 2$. Geldt dit ook voor $\alpha = 2$?