

Tentamen Analyse II, 2 augustus 2001

Studenten die deelnemen aan het deeltentamen Analyse 2-B moeten de opgaven 3, 4, 5 en 6 maken. De andere studenten maken de opgaven 1, 2, 3, 4, 5 en 6.

1. (a) Bepaal alle punten van $\mathbb{R}^2$ waar de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

continu is.

- (b) Geef de lineaire benadering van de functie

$$f(x, y) = \sqrt{2 - x^4 + y^2}$$

in het punt $(1, 1)$ en gebruik het om $f(1.1, 0.9)$ te benaderen.

2. Gegeven de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 2x)$.

- (a) Bepaal, indien het bestaat, het maximum en het minimum van de functie f op de verzameling

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + 2y^2 < 1\}.$$

- (b) Bepaal, indien het bestaat, het maximum en het minimum van de functie f op de verzameling

$$\mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + 2y^2 = 1\}.$$

3. Bereken de integraal

$$\int_G xy \, dx dy,$$

waarbij het gebied G is gegeven door

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x^2 - y^2 \leq 12, 13 \leq x^2 + y^2 \leq 15\}$$

Gebruik hierbij de substitutie

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = x^2 - y^2. \end{cases}$$

- (a) Teken het gebied G .
(b) Druk x en y uit in u en v en beschrijf G in termen u en v .
(c) Bepaal de Jacobiaan $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.
(d) Bereken de integraal.

4. Gegeven het vectorveld

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

- (a) Is $\vec{F}$ conservatief op $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$? Zo ja, bepaal een potentiaal-functie. Zo nee, laat zien waarom niet.
- (b) Is $\vec{F}$ conservatief op $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$? Zo ja, bepaal een potentiaalfunctie. Zo nee, laat zien waarom niet.

5. Gegeven zijn het oppervlak

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| = 10, z \leq 9\}$$

en het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + 1)yz\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

De orientatie van S is van het punt $(0, 0, 0)$ vandaan (dus naar buiten) gericht. Bepaal

$$\int \int_S \text{curl } \vec{F} d\vec{S}.$$

6. (a) Zij in $\mathbb{R}^2$ gegeven het lijnsegment L van het punt (a_1, b_1) naar (a_2, b_2) . Bepaal

$$\int_L x dy - y dx.$$

- (b) Zij C een positief georiënteerde stuksgewijs gladde en gesloten kromme. Zij D het gebied door C omsloten. Teken een voorbeeld van C en D . Bepaal vervolgens

$$\int_C x dy - y dx.$$

- (c) Teken de vierhoek met hoekpunten $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$ en $(0, 3)$. Bereken de oppervlakte van de vierhoek.