Hertentamen Analyse 2

Vrijdag 19 augustus, 10:00-13:00u

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!

Succes!

1.) Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = x(x-y)(y-1)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ -1 < x < 1, -2 < y < 2\}, \\ \partial R &= \text{de rand van } R. \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x, y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.

(b) Toon aan dat f vier kritieke punten op $\mathbb{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f één extremum heeft in R. Is dit extremum een lokaal maximum of lokaal minimum? Licht uw antwoord toe.

(d) De beperking van de functie f tot ∂R heeft zes extrema. Bereken plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte van deze.

(e) De beperking van de functie f tot $\overline{R}$, i.e. R verenigd met de rand ∂R, heeft zes extrema. Bepaal deze (i.e. bereken plaats, aard en grootte - zie (d)).

!! Vervolg op achterkant !!

2.) Het cylinderoppervlak S in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$S := \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 3\}$$

met oriëntatie van de z-as af gericht. $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is het vectorveld

$$\mathbf{F}(x, y, z) := x^3\mathbf{i} \ + \ y^3\mathbf{j} \ + \ z^3\mathbf{k}.$$

(a) Schets S en geef duidelijk daarin aan hoe de oriëntatie van S is en de oriëntatie op ∂S, de rand van S, die geïnduceerd wordt door de oriëntatie op S.

Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door S:

(b) Direct, door middel van een parametrisatie van S, en

(c) Indirect, met behulp van de divergentiestelling.

(d) Bereken de circulatie van $\mathbf{F}$ over ∂S, i.e.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet dr.$$

3.) Het begrensde gebied D in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq z \leq \ 2x + 2y\}$$

heeft een oriëntatie op de rand ∂D met naar buiten gerichte normaal.

(a) Schets D en de verzameling

$$D_z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in D\}$$

voor $z = 1$ en $z = 2$.

(b) Bereken het volume van D.

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-2}$.

(c) Bereken

$$\int_{D_2} f dA.$$