# Tussentoets Analyse 2

Dinsdag 11 maart 2008, 9:00-11:00u

---

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de naam van uw docent (F. den Hollander of V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap die u maakt ook uit.
- Een formuleblad is niet toegestaan, een (grafische) rekenmachine wel. Exacte antwoorden worden gevraagd, geen benaderingen.
- Deze toets bestaat uit 3 opgaven!

**Succes!**

---

1.) Zij $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= F_1(x,y,z)\,\mathbf{i} \;+\; F_2(x,y,z)\,\mathbf{j} \;+\; F_3(x,y,z)\,\mathbf{k} \\ &= xyz\,\mathbf{i} \;+\; \ln(x^2-3)\,\mathbf{j} \;+\; \sqrt{2-yz}\,\mathbf{k} \\ &= (xyz,\; \ln(x^2-3),\; \sqrt{2-yz})^T \end{aligned}$$

en $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door

$$f(x,y,z) := F_2(x,y,z) + F_3(x,y,z).$$

(a) Bepaal het domein van $F$.

(b) Bereken de Jacobi-matrix $D\mathbf{F}(x,y,z)$.

(c) Bepaal div $\mathbf{F}$, curl $\mathbf{F}$ en grad $f$.

(d) Bereken de lineaire benadering van $f$ rond het punt $(2,1,1)$.

(e) Bereken de richtingsafgeleide van $f$ in het punt $(2,1,1)$ in de richting gegeven door de vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} = (1,-1,1)^T$.

Zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s,t) &= t^2\,\mathbf{i} \;+\; s^2\,\mathbf{j} \;+\; 2st\,\mathbf{k} \\ &= (t^2,\; s^2,\; 2st)^T \end{aligned}$$

en $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $H(s,t) = F(G(s,t))$.

(f) Bereken de Jacobi-matrix $D\mathbf{H}(s,t)$ met behulp van de kettingregel voor functies van meerdere variabelen.

2.) Laat $\mathcal{C}$ de doorsnijdingskromme zijn van de oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijkingen $xy = 1$ en $z^2 = x + y$ beperkt tot de halfruimte $\{z > 0\}$.

(a) Geef een parametrisatie $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ van de kromme $\mathcal{C}$. Geef daarbij ook het bijbehorende parameterdomein.

(b) Bereken de snelheid $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$. Wat is de grootte van de snelheid in het punt $(1, 1, \sqrt{2})$?

3.) Laat $\mathcal{C}$ de kromme zijn gegeven door de parametrisatie

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= t\,\mathbf{i} \;+\; t^2\,\mathbf{j} \;+\; \tfrac{1}{3}t^3\,\mathbf{k} \\ &= (t,\; t^2,\; \tfrac{1}{3}t^3)^T, \end{aligned}$$

waarbij $0 \le t \le 1$.

(a) Zij $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door $g(x, y, z) = 2x + 3z$. Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}} g\, ds$.

(b) Zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x, y, z) &= 3e^x\,\mathbf{i} \;+\; \sin(\pi x)\,\mathbf{j} \;+\; y(7y + 8z)\,\mathbf{k} \\ &= (3e^x,\; \sin(\pi x),\; y(7y + 8z))^T. \end{aligned}$$

Bepaal de lijnintegraal van de tangentiële component van $\mathbf{G}$ langs de kromme $\mathcal{C}$, d.w.z.

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \bullet d\mathbf{r}.$$