Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 7 maart 2016, 10:00 - 13:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of een verwijzing naar de theorie.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven die allevier ongeveer even zwaar tellen.

---

1. Beschouw de inhomogene tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = f(t), \tag{1}$$

waarin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.

(a) Beschouw eerst het homogene probleem $f(t) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\text{hom}}(t) = x_{\text{hom}}(t; A, B)$ van (1), waarbij $A, B \in \mathbb{R}$ nog vrij te kiezen parameters zijn.

(b) Beschouw nu het inhomogene probleem. Bepaal ook hiervan de algemene oplossing $x_{\text{inh}}(t) = x_{\text{inh}}(t; \tilde{A}, \tilde{B})$, waarbij nu $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$ de vrije parameters zijn.

(c) Beschouw wederom het inhomogene probleem. Neem aan dat er een $\alpha > 0$ en $C > 0$ zijn zodanig dat $f(t)$ voldoet aan,

$$|f(t)| < Ce^{-\alpha t} \quad \text{voor} \quad t > 0.$$

Laat zien dat het inhomogene probleem (1) een unieke oplossing $x^*_{\text{inh}}(t)$ heeft waarvoor geldt dat $\lim_{t\to\infty} x^*_{\text{inh}}(t) = 0$.

2.A(i). Beschouw in $\mathbb{R}^n$ de twee lineaire (n-dimensionale) vergelijkingen,

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} \quad \text{(A1)} \qquad \text{en} \quad \dot{\vec{y}} = -A(t)\,\vec{y}, \quad \text{(A2)}$$

waarbij $A(t)$ een $n \times n$ matrix is waarvan de coëfficiënten continue functies van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn.

Neem eerst $n = 1$. Laat $x(t)$ een oplossing van (A1) zijn en $y(t)$ van (A2): laat zien dat het product $x(t)y(t)$ constant is.

A(ii). Neem nu $n > 1$ en definieer $z(t)$ als het inproduct van de oplossingen $\vec{x}(t)$ en $\vec{y}(t)$ van (A1) en (A2), ofwel: $z(t) = <\vec{x}(t), \vec{y}(t)> \in \mathbb{R}$. Geldt nu ook noodzakelijk dat $z(t)$ constant is? Zo ja, geef een bewijs, zo nee geef een tegenvoorbeeld.

B(i). Beschouw nu in $\mathbb{R}^n$,

$$\dot{\vec{x}} = B\vec{x}, \tag{2}$$

waarin B een 'gewone' *reële* $n \times n$ matrix is met constante coëfficiënten, maar met eigenwaarden $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $\lambda \notin \mathbb{R}$, ofwel: de matrix B heeft geen reële eigenwaarden. Laat $\vec{x}_0(t)$ een niet-triviale oplossing van (2) zijn (ofwel: $\vec{x}_0(t) \not\equiv 0$). Toon aan dat $\vec{x}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{x}}_0(t)$ ook een oplossing van (2) is en dat $\vec{x}_1(t)$ *lineair onafhankelijk* is van $\vec{x}_0(t)$.

B(ii). Definieer $\vec{x}_2(t)$ als $\vec{x}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{x}}_1(t)$ (en dus $\vec{x}_2(t) = \ddot{\vec{x}}_0(t)$): $\vec{x}_2(t)$ is ook een oplossing van (2), maar is $\vec{x}_2(t)$ ook noodzakelijk lineair onafhankelijk van (het opspansel) $\{\vec{x}_0(t), \vec{x}_1(t)\}$? Zo ja, geef een bewijs, zo nee geef een tegenvoorbeeld.

Z.O.Z.

3. Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + (1-y)^2, \\ \dot{y} &= (1-x)(1-y). \end{cases} \tag{3}$$

Oplossingen met beginvoorwaarden (x_0, y_0) worden genoteerd als $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))$, ofwel: $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))$ is een oplossing van (3) met $(x(0;(x_0,y_0)), y(0;(x_0,y_0))) = (x_0,y_0))$.

(a) Bepaal de vaste punten/evenwichtspunten van stelsel (3).

(b) Bepaal de nullclines – de verzamelingen in het (x,y)-vlak waarop danwel $\dot{x} = 0$ danwel $\dot{y} = 0$ – schets deze in het (x,y)-vlak en geef (met pijltjes) het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ aan in de gebieden waarin het (x,y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x},\dot{y})$ aan op de nulclines.

(c) Beschouw oplossingen $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))$ van (3) met beginvoorwaarden (x_0,y_0) waarvoor geldt dat $y_0 > 1$. Laat zien dat geldt dat $y(t;(x_0,y_0)) > 1$ voor alle $t \geq 0$.

(d) Beschouw nu oplossingen $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))$ van (3) met beginvoorwaarden (x_0,y_0) waarvoor geldt dat $x_0 < 1$ en $0 < y_0 < 2$: laat zien dat voor al deze oplossingen geldt dat $\lim_{t\to\infty}(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0))) = (0,1)$.

4. Beschouw het 2-dimensionale stelsel,

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x + y + 3xy - xF(x^2+y^2), \\ \dot{y} &= -x + 4y + 3y^2 - yF(x^2+y^2), \end{cases} \tag{4}$$

waarbij $F(R)$ een continu differentieerbare functie van $R \geq 0$ is waarvoor geldt dat $F(0) = 0$.

(a) Schrijf het stelsel in poolcoordinaten (r,θ).

(b) Laat zien dat (4) alleen $(0,0)$ als kritiek punt heeft en vervolgens dat $(0,0)$ altijd instabiel is – onafhankelijk van de keuze van F (met $F(0) = 0$).

(c) Neem $F(R) = R = x^2 + y^2 = r^2$: bewijs dat stelsel (4) minstens 1 (niet-constante) periodieke oplossing heeft.

(d) Geef een voorbeeld van een functie $F(R)$ waarvoor stelsel (4) minstens 2 (niet-constante) periodieke oplossingen heeft.