Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Vrijdag 5 januari 2018, 14:00-17:00

- Schrijf op ieder vel naam, studentnummer en studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook geen formules uit het boek zonder afleiding.
- Er worden exacte antwoorden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

Succes!

1.) Bekijk

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

(a) Bepaal de algemene oplossing van de vergelijking.

(b) Bepaal nu de algemene oplossing van de volgende inhomogene vergelijking

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = e^{\alpha t},$$

voor alle $\alpha \in \mathbf{R}$. De uiteindelijke oplossing mag geen integralen bevatten.

(c) Bepaal alle $\alpha \in \mathbf{R}$ zodanig dat er beginvoorwaarden $(y(0), y'(0))$ bestaan waarvoor de oplossing begrensd is voor $t > 0$. Geef de relatie(s) waaraan deze beginvoorwaarden moeten voldoen.

2.) Bekijk de eerste orde inhomogene vergelijking

$$x\frac{dy}{dx} = -xy + 2y + f(x). \tag{1}$$

(a) Bekijk eerst de homogene vergelijking waarvoor $f(x) = 0$. Bepaal de algemene oplossing van de vergelijking.

(b) Neem $f(x) = e^{-x}$ en bepaal nu de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking (1). Voor welke beginvoorwaarden $y(1)$ bestaat er een oplossing en is deze oplossing begrensd voor $x > 1$? Geef de oplossing in termen van $y(1)$.

(c) Merk op dat voor alle oplossingen van vergelijking (1) met $f(x) = e^{-x}$, er geldt dat $y(0) = -\frac{1}{2}$. Is dit in tegenspraak met de existentie- en uniciteits-Stelling? Leg duidelijk uit waarom wel of niet.

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned} x' &= x - y - y^3 - 2x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + y - 2y(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Je mag aannemen dat de oorsprong het enige vaste punt van dit systeem is.

(a) Bepaal het gelineariseerde stelsel rond de oorsprong. Bepaal hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van de oorsprong voor het gelineariseerde systeem. Wat kun je hieruit concluderen voor de stabiliteit en het karakter van $(0, 0)$ voor het gehele stelsel?

(b) Schrijf het stelsel in poolcoördinaten r en θ.

(c) Bewijs dat er minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing bestaat.

4.) Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - x)(1 - y) \\ \dot{y} &= -y + (1 - x)^2. \end{aligned}$$

(a) Bepaal de vaste/equilibrium punten. Geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.

(b) Geef voor elk vast punt een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt. Bepaal ook het bijbehorende karakter (zadel, centrum, focus of knoop) van dat vaste punt.

(c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x, y)-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x, y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nullclines.

(d) Bekijk nu oplossingen met beginvoorwaarden (x_0, y_0) waarvoor geldt dat $0 < x_0 < 2$ en $y_0 < 1$. Bewijs voor al deze oplossingen dat er geldt dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (1, 0)$.

(e) Bekijk nu oplossingen met beginvoorwaarden (x_0, y_0) waarvoor geldt dat $x_0 < 0$ en $y_0 < \alpha x_0 + 1$ met $\alpha > 0$. Bewijs dat er een $\alpha_0 > 0$ bestaat zodanig dat er voor al deze oplossingen ook geldt dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0))) = (1, 0)$ voor alle $\alpha > \alpha_0$.