TENTAMEN ANALYSE 3. maandag 23 december 2002. 10.00-13.00.

1a. Toon aan dat voor $0 \le x \le 2\pi$

$$\pi \sin \frac{1}{2} x \;=\; 2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}.$$

Beargumenteer ook waarom er werkelijk gelijkheid optreedt.

b. Bepaal de som van de reeks

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots$$

c. Gebruik de identiteit van Parseval om de som van de reeks

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \ldots$$

te bepalen.

2. Bepaal de eerste zes coëfficiënten van de machtreeks van de functie $\mathrm{Log}(\cos z)$ rond $z = 0$.

3. Beschouw de differentiaalvergelijking (d.v.) $zy''(z) + 2y'(z) + zy(z) = 0$.

a. Bepaal de singuliere punten van de d.v. in $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ en hun aard.

b. Toon aan dat de d.v. (op een constante na) precies één op $\mathbf{C}$ analytische oplossing $w(z)$ heeft en bepaal de coëfficiënten van de machtreeks van $w(z)$ rond $z = 0$.

c. Toon aan dat de van $w(z)$ lineair onafhankelijke oplossingen in $z = 0$ een pool hebben en bepaal de orde van de pool.

4. Voor $x \in [-1, 1]$ en $\alpha \in \mathbf{R}$ is de rij functies $\{f_{n,\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ gegeven door

$$f_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 1/n < |x| \le 1 \\ n^{\alpha-1} - n^{\alpha} x & \text{voor } -1/n \le x \le 1/n \end{cases}$$

a. Voor welke α convergeert de rij $\{f_{n,\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ puntsgewijs op $[-1, 1]$?

b. Voor welke α convergeert de rij $\{f_{n,\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ uniform op $[-1, 1]$?

c. Voor welke α convergeert de rij $\{f_{n,\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ uniform op $[\delta, 1]$ voor $\delta > 0$?

TENTAMEN ANALYSE 3. Antwoorden van 23-12-02.

1a. Bepaal de Fourierreeks van $\pi\sin\frac{1}{2}x$ op $[0,2\pi]$. Bij periodieke voortzetting tot $\mathbf{R}$ krijgen we een even functie. De coëfficiënten b_n van $\sin nx$ zijn dus nul. De Fourierreeks wordt dus $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, met $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\pi\sin\frac{1}{2}x\cos nx dx$. Deze integraal is te berekenen m.b.v. herhaald partieel integreren of door $2\sin ax\cos bx = \sin(a+b)x+\sin(a-b)x$ te gebruiken. Dit levert de gewenste vorm. Gelijkheid geldt omdat de functie continu en overal (ook in de randen $x=0$ en $x=2\pi$) links- en rechtsdifferentieerbaar is (crit. van Dini). Het is ook mogelijk de Fouriercosinusreeks op $[0,2\pi]$ te bekijken. Deze heeft de vorm $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx/2)$, met $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\pi\sin\frac{1}{2}x\cos(nx/2)dx$. Nu moet worden aangetoond dat $a_n=0$ voor n oneven. In de gegeven reeks komen immers alleen de termen met n even voor.

b. De gevraagde reeks is gelijk aan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$. De som vinden we uit (a) door $x=\pi$ in te vullen:

$$\pi=\pi\sin\frac{1}{2}\pi=2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$$

Het antwoord is $\dfrac{\pi-2}{4}$.

c. Parseval toepassen geeft:

$$\pi^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi\sin\frac{1}{2}x)^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=8+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

De som van de reeks is dus $\dfrac{\pi^2-8}{16}$.

2. Rond $z=0$ is $\cos z=1-z^2/2+z^4/24-\ldots$. Voor de eerste zes coëfficiënten hebben we alleen termen met z^n voor $n=0,\ldots,5$ nodig. Verder is rond $z=0$ $\mathrm{Log}(1+z)=z-z^2/2+z^3/3+\ldots$. Invullen van de reeks van $\cos z-1$ voor z in de tweede machtreeks geeft

$$\mathrm{Log}(\cos z)=\mathrm{Log}(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\ldots)=-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{12}z^4+\ldots$$

3a. In $z=0$ is er een regulier singulier punt; in $z=\infty$ is er een irregulier singulier punt. Dit is o.a. in te zien door te kijken naar de d.v. voor $w(t)=y(z)$ met $z=1/t$. Met $y'(z)=-t^2w'(t)$ en $y''(t)=t^4w''(t)+2t^3w'(t)$ vinden we dan $t^4w''+w(t)=0$. De singulariteit in $t=0$ is dus irregulier.

b. Substitueer een machtreeksoplossing $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\rho}$ ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is ook goed). Dit levert de recurrente relatie tussen de coëfficiënten

$$a_{n+2}(n+\rho+2)(n+\rho+3) + a_n = 0.$$

De indiciaalvergelijking is $\rho(\rho+1) = 0$. Het geval $\rho = 0$ geeft een analytische oplossing $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)}$. M.b.v. de verhoudingstest zien we dat de convergentiestraal ∞ is, dus $w(z)$ analytisch op geheel $\mathbf{C}$.

c. Het geval $\rho = -1$ geeft een oplossing $v(z) = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met $a_0 \neq 0$ dus $v(z) = z^{-1}v_0(z)$ met $v_0(z)$ analytisch en $\lim_{z\to 0} z \cdot v(z) = v_0(0) = a_0 \neq 0$. $z = 0$ is dus een pool van v van orde 1. Elke van w lin.onafh. oplossing is van de vorm $Aw(z) + Bv(z)$ met $B \neq 0$ en heeft dus ook een pool in $z = 0$ van orde 1.

4a. Voor $x \neq 0$ is $f_{n,\alpha}(x) = 0$ voor $n > 1/|x|$ dus $\lim_{n\to\infty} f_{n,\alpha}(x) = 0$ voor $x \neq 0$. Verder is $f_{n,\alpha}(0) = n^{\alpha-1}$ en dit convergeert voor $\alpha \leq 1$.

b. $\delta_n = \sup f_{n,\alpha}(x) = n^{\alpha-1}$ en δ_n convergeert naar 0 precies als $\alpha < 1$.

c. Voor $n > 1/\delta$ is $f_{n,\alpha}(x) = 0$ voor alle $x \in [\delta, 1]$, dus voor alle α convergeert de rij uniform naar nul op $[\delta, 1]$.

TENTAMEN ANALYSE 3. maandag 3 februari 2003. 14.00-17.00.

---

1. Onderzoek voor welke $z \in \mathbf{C}$ de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k}} z^k$ convergeert.

2. De functie $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is gedefinieerd als

$$u(x,y) = e^{x-y} \sin(x+y) \; + \; 6y^3 x \; - \; 6x^3 y.$$

a. Toon aan dat u op $\mathbf{R}^2$ een harmonische functie is.

b. Bepaal de harmonisch geconjugeerden $v = v(x,y)$ van u.

c. Bepaal een analytische functie $f = f(z)$ zodat u het reële deel van f is. (Geef f als functie van de complexe variabele z.)

3. Beschouw de differentiaalvergelijking (d.v.) $z^2 y''(z) + 2zy'(z) + (z^2 - 2)y(z) = 0$.

a. Bepaal de singuliere punten van de d.v. in $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ en hun aard.

b. Toon aan dat de d.v. (op een constante na) precies één op $\mathbf{C}$ analytische oplossing $j(z)$ heeft en bepaal de eerste vier coëfficiënten van de machtreeks van $j(z)$ rond $z = 0$.

c. Toon aan dat de van $j(z)$ lineair onafhankelijke oplossingen in $z = 0$ een pool hebben en bepaal de orde van de pool.

4. Toon aan dat voor $0 \le x \le \pi$

$$\pi \cos 2x \;=\; 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4n^2 + 4n - 3} \sin(2n+1)x.$$

Beargumenteer ook waarom er werkelijk gelijkheid optreedt.

b. Bepaal de som van de reeks

$$\frac{1}{-1 \cdot 3} - \frac{3}{1 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 7} - \frac{7}{5 \cdot 9} + \dots$$

c. Gebruik de identiteit van Parseval om de som van de reeks

$$\frac{1^2}{(-1)^2 \cdot 3^2} + \frac{3^2}{1^2 \cdot 5^2} + \frac{5^2}{3^2 \cdot 7^2} + \frac{7^2}{5^2 \cdot 9^2} + \dots$$

te bepalen.