

ANALYSE 3

22 december 2003, 10:00-13:00. Er zijn zes opgaven.

1. Definieer voor $n = 1, 2, \dots$ de rij functies $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

- (a). Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ puntsgewijs convergeert op $[0, \infty)$ en uniform convergeert op $[0, A]$ voor iedere $A > 0$.
- (b). Laat zien dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ niet uniform convergeert op $[0, \infty)$.
- (c). Geldt $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ voor alle $x > 0$?
2. Gegeven is de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} z^k$.

- (a). Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.
- (b). Ga na in welke punten van de convergentiecirkel deze machtreeks convergeert.
- (c). Toon aan dat deze machtreeks een continue functie op het convergentiegebied definieert.

3. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y' + y \cos t = \cos t.$$

- (a). Los het beginwaardeprobleem op als gegeven is dat $y(\pi) = 2$.
- (b). Analyseer het gedrag van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking voor voldoende grote tijd t .
4. Laat $L > 0$ en beschouw $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} -x(L-x), & -L \leq x < 0, \\ x(L-x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

- (a). Bereken de Fourierreeks van f en beargumenteer waarom f een convergente Fourierreeks heeft.
- (b). Bereken een convergente Fouriersinusreeks voor f beperkt tot het interval $[0, L]$.

Z.O.Z.

5. Los met behulp van de Laplace transformatie het volgende beginwaardeprobleem op

$$y'' + y' - 6y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

waarbij f een willekeurige continue functie is.

6. Beschouw de golfvergelijking

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

op het gebied $\{(x, t) \mid 0 < x < L \text{ en } t > 0\}$. Bepaal de oplossing van de golfvergelijking met randcondities $u(0, t) = 0$ en $u(L, t) = 0$ en begincondities $u(x, 0) = x(L - x)$ en $u_t(x, 0) = -x(L - x)$ voor $0 \leq x \leq L$.

Werk netjes en presenteer uw antwoorden volledig. Succes!