HERKANSING ANALYSE 3

8 februari 2005, 10:00-13:00

1. Laat de rij (f_n) op $[0, \infty)$ gegeven zijn door

$$f_n(x) = \frac{x}{(x + (1/n))^n}, \qquad x \geq 0.$$

(a). Onderzoek voor welke $x \geq 0$ de rij $(f_n(x))$ convergeert.

(b). Zij $t > 1$. Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergeert op $[t, \infty)$.

(c). Laat zien dat de rij (f_n) niet uniform convergeert op $[1, \infty)$

(d). Is de rij (f_n) uniform convergent op $(1, \infty)$.

2. Gegeven is de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k$.

(a). Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

(b). Ga na in welke punten van de convergentiecirkel deze machtreeks convergeert.

(c). Bereken de som van de machtreeks.

3. Beschouw de differentiaalvergelijking (d.v.)

$$y' = (1 - y/20)y$$

(a). Los het beginwaardeprobleem op voor $y(0) = 5, 10$ en 20.

(b). Teken de onder (a) gevonden oplossingen.

(c). Bepaal de evenwichten en de type van de evenwichten.

4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + (1+i)y' + iy = 0.$$

Z.O.Z.

5. Laat $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a). Bereken de Fouriersinusreeks van f.

(b). Bereken de Fouriercosinusreeks van f.

(c). Wat kunt u zeggen over de convergentie van deze reeksen.

5. Beschouw de warmtevergelijking $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ op het gebied $\{(x,t) \mid 0 < x < \pi/2 \text{ en } t > 0\}$. Bepaal de oplossing als gegeven is dat $u(0,t) = u(\pi/2,t) = 0$ en $u(x,0) = \sin x \, \cos x$ voor $0 \le x \le \pi/2$.

Werk netjes en presenteer uw antwoorden volledig. Succes!