

Analyse 3

Tentamen 14 januari 2008, 10–13 uur

Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (bij voorkeur korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan. Boeken, telefoon en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

1. Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5 + n}{3^n \ln n} z^n \qquad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n} z^{n^2}.$$

2. Los de onderstaande beginwaardeproblemen op.

$$(a) \begin{cases} y'(t) = 3t^5 y(t) \ln y(t), & t > 0, \\ y(0) = e^2. \end{cases}$$
$$(b) \begin{cases} 3y(t)^2 y'(t) + y(t)^3 + 2te^{t^2-t} = 0, & t > 0, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

3. Beschouw de functies f_0, f_1, f_2, \dots gedefinieerd door

$$f_0(x) = \sin x,$$
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) \sin t \, dt, \quad x \in [0, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Toon aan dat

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!}, \quad x \in [0, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(b) Toon aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ uniform convergent is. Noem de limiet g .

(c) Toon aan dat

$$g(x) = \sin x + \int_0^x g(t) \sin t \, dt, \quad x \in [0, 1].$$

(d) Toon aan dat g continu differentieerbaar is op $(0, 1)$ en dat g voldoet aan het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} g'(x) - g(x) \sin x = \cos x, & x \in (0, 1) \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Z.O.Z.

4. (a) Bepaal coëfficiënten $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ zo dat $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ voldoet aan

$$\begin{cases} y''(t) + 2ty'(t) + 4y(t) = 0, & t > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(b) Schrijf de functie y uit (a) als (eindige) combinatie van elementaire functies.

5. Bepaal de algemene oplossing van

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = 9e^{2t}.$$

6. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t)^3 y_2(t)^2 - y_1(t) \\ y_2'(t) = e^{y_1(t)} - e^{y_2(t)} \end{cases}, \quad t > 0.$$

(a) Laat zien dat dit stelsel drie evenwichten heeft.

(b) Geef de definitie van een asymptotisch stabiel evenwicht.

(c) Bepaal voor ieder van de drie evenwichten of het stabiel of instabiel is.

Succes!