

Tentamen Analyse 3

Maandag 12 januari 2009, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel naam, studentnummer en studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

Succes!

1.) Bekijk het beginwaardeprobleem

$$x \frac{dy}{dx} = (x + 2)y + x^3; \quad y(1) = 1.$$

- Bepaal de oplossing van de homogene vergelijking.
- Bepaal nu de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking en bepaal daarmee de oplossing van het beginwaardeprobleem.

2.) Bekijk

$$axy \frac{dy}{dx} + 2x^2 + y^2 = -x,$$

waarbij a een parameter is.

- Bepaal voor welke a de vergelijking exact is. Geef voor deze keuze van de waarde van a een (impliciete) uitdrukking voor de oplossing van vergelijking.

Kies nu $a = 1$.

- Bepaal een integrerende factor waardoor de vergelijking exact wordt.
- Bepaal met behulp van (b) een (impliciete) uitdrukking voor de oplossing waarvoor $y(1) = 2$.

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Bekijk

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

- (a) Bepaal de oplossing van de vergelijking.
- (b) Bepaal nu de oplossing van de volgende inhomogene vergelijking

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 7e^{-2t}$$

met beginvoorwaarde

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 6.$$

4.) Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy \\ \dot{y} &= 2y - 2x^2.\end{aligned}$$

- (a) Bepaal de vaste/equilibrium punten en karakteriseer deze. Geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.
- (b) Geef voor elk vast punt een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt.
- (c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x, y) -vlak en geef het teken van \dot{x} en \dot{y} in de gebieden waarin het (x, y) -vlak door de nullclines wordt onderverdeeld.
- (d) Geef in de schets bij (c) ook vaste punten met het fasevlak in de buurt van deze punten. Schets mogelijke connecties tussen vaste punten in het geval dat deze bestaan. Schets voor deze connecties, x en y als functie van t (geef duidelijk aan bij welke baan in het fasevlak deze oplossingen behoren).