Tentamen Complexe Functietheorie

Maandag 8 juni 2015, 10 – 13 uur

- Vermeld uw naam (met voornaam en voorletters) en uw studentnummer.
- Er zijn geen hulpmiddelen toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit *vijf* opgaven. Vergeet de achterkant niet.
- Punten per opgave (onder voorbehoud):
- $(3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) + (2 + 2 + 2) + (1 + 3 + 1\frac{1}{2}) + (6\frac{1}{2}) + (2 + 2)$.
- Tentamencijfer = (aantal punten + 3)/3.

---

1. De functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(z) = 2z^5 + 6z - 1$.

(a) Laat zien dat f 4 nulpunten (met multipliciteit geteld) in de open annulus $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ heeft.

(b) Laat zien dat f 4 *verschillende* nulpunten in de open annulus uit onderdeel (a) heeft. U kunt hierbij gebruikmaken van het resultaat van onderdeel (a), ook als u dit niet heeft opgelost.

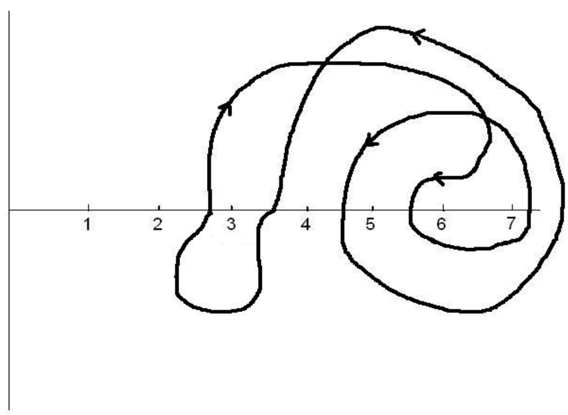
2. Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke domein in het complexe vlak, gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{(z-5)}{(e^{i\pi z} + 1)}.$$

(a) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij een eventuele pool ook de orde van de pool en motiveer dit getal.

(b) Bepaal voor iedere geïsoleerde singulariteit van f het residu van f in de betreffende singulariteit.

(c) Bereken $\int_\alpha f(z)\,dz$, waarbij het beeld van α de georiënteerde contour in de onderstaande figuur is. Geef, als u niet alle ingrediënten voor de berekening tot uw beschikking heeft, in ieder geval aan *hoe* deze integraal kan worden uitgerekend.



Zie ommezijde

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{C}$, gegeven door

$$f(z) = \frac{3}{z-1} - \frac{2z}{z-3} \qquad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 1, 3).$$

(a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond het punt $4 + i$.

(b) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+1| < 4\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

(c) Bepaal de Laurentreeks van f op de annulus $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 4\}$. U behoeft uw antwoord niet te vereenvoudigen.

4. Laat $a > 0$. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx,$$

waarbij $\log : (0, \infty) :\to \mathbb{R}$ de gebruikelijke reëelwaardige logaritme op de strikt positieve reële getallen is.

5. (a) Beschouw voor $a, b > 0$ de ellips $E_{a,b}$ in het complexe vlak die gegeven wordt door

$$E_{a,b} = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Toon aan dat er een punt z op $E_{a,b}$ bestaat zodanig dat $|\cos z| \geq 1$.

(b) Laat $\epsilon > 0$ en zij

$$U_{1+\epsilon}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \epsilon\}$$

de open schijf in het complexe vlak met centrum 0 en straal $1 + \epsilon$. Laat zien dat er *geen* analytische functie f op $U_{1+\epsilon}(0)$ bestaat, zodanig dat

$$f\left(\frac{1}{2015^k}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 2015^k}\right)},$$

voor $k = 1, 2, 3, \ldots$.