

Tentamen Analyse IV, 14 juni 2004, 14.00–17.00 uur

1. Bereken door middel van contourintegratie de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$$

2. Laat zien dat het polynoom $z^6 + 5z^2 - 8z + 1$ precies vijf nulpunten heeft in de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

3. Gegeven is de functie

$$f(z) = \frac{z}{(z+i)(z-2)}.$$

- (a) Bepaal de Laurentreeks van f om $z = 0$ voor het gebied $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.
(b) De functie f is om $z = -i$ in een Laurentreeks te ontwikkelen die convergeert voor $|z+i| > r$, voor zekere r . Bepaal de minimale waarde van r en bepaal de Laurentreeks.
4. (a) Laat zien dat de Laplace-getransformeerde van $f(x) = xe^x$ gelijk is aan $\mathcal{L}(f)(s) = 1/(1-s)^2$. Geef ook aan voor welke s deze formule geldig is.
(b) Bereken de functie $y(t)$, waarvoor de Laplace-getransformeerde gelijk is aan

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{-s}{(1-s)^2(s+3)}.$$

- (c) Los het volgende beginwaardeprobleem op door gebruik te maken van Laplace-transformaties.

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = xe^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

5. (a) Bepaal de Fouriergetransformeerde van de functie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

- (b) Zij $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$. Los, door gebruik te maken van Fouriertransformaties, het volgende beginwaardeprobleem op \mathcal{S} op:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(x, 1) = 0 \\ u(x, y) \rightarrow 0, \text{ uniform in } y \text{ als } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Schrijf de oplossing als enkelvoudige integraal.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{20+20+(10+10)+(5+5+5)+(5+10)}{10}.$$