Tentamen Analyse 4,
Woensdag 17 augustus 2005, 10.00 uur – 13.00 uur

1. Laat zien dat
$$\int_0^\infty \frac{\log x dx}{(x^2+4)} = \frac{\pi \log 2}{4}.$$

2. Zij h holomorf binnen en op de cirkel $\gamma(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, laat de Taylorreeks van h bij 0 gegeven zijn door $h(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$. Veronderstel dat h precies m nulpunten heeft binnen $\gamma(0;1)$. Laat zien dat
$$\min_{|z|=1} |h(z)| \leq |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{m-1}| + |c_m|.$$
Hint: voer de functies $f(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n$ en $g(z) = \sum_{n=m+1}^\infty c_n z^n$ in en gebruik de stelling van Rouché.

3. (a) Bepaal de Laurentreeks om 0 op de annulus $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ van
$$\frac{z}{(z+1)^2(z+2)}$$
   (b) Bepaal het hoofddeel van de Laurentontwikkeling om 0 van
$$\frac{\mathrm{cosec} z^2}{z^3}.$$

4. Laat $(z_n)_{n=0}^\infty$ een rij onderling verschillende punten in $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ zijn die convergeert naar 0 (dus $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$). Bewijs of weerleg de volgende uitspraken. Motiveer uw antwoord.
   (a) Zij f holomorf op D. Als $f(z_n) = e^{z_n} + z_n$, dan is $f(z) = e^z + z$
   (b) Er bestaat een functie f, holomorf op D, zo dat $f(z_n) = \sqrt{n}$.
   (c) Er bestaat een functie f, holomorf op D, zo dat $f(z_n) = z_n$ voor alle n en $f(0) = 1$.
   (d) Er bestaat een functie f, holomorf op D, zo dat $f(z_n) = (-1)^n z_n$ voor alle n.

5. (a) Laat zien dat de Laplace-getransformeerde van $f(t) = t^2 e^{2t}$ gelijk is aan $2/(s-2)^3$. Geef ook aan voor welke s deze formule geldig is.

   (b) Los het volgende beginwaardeprobleem op door gebruik te maken van Laplacetransformaties.

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = t^2 e^{2t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

6. (a) Laat zien dat de Fouriergetransformeerde van de functie

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

   gelijk is aan

$$\frac{2i(\omega \cos \omega - \sin \omega)}{\omega^2}.$$

   (b) Zij $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$. Los, door gebruik te maken van Fouriertransformaties, het volgende beginwaardeprobleem op $\mathcal{S}$ op:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(x, 1) = 0 \\ u(x, y) \to 0, \text{uniform in } y \text{ als } |x| \to \infty. \end{cases}$$

   Schrijf de oplossing als enkelvoudige integraal.

Cijfer $= 1 + \frac{20+15+15+10+15+15}{10}$.