TENTAMEN ANALYSE 4. 29 mei 2006. 14.00-17.00.

Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of ander passend commentaar.

---

1. Bereken m.b.v. contourintegratie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

Schrijf het antwoord in de vorm van een reëel getal. (15 p)

2. Bewijs dat alle nulpunten van het polynoom $P(z) = z^6 - z^4 + 6z - 1$ in de schijf $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 2\}$ liggen. (5 p)

b. Hoeveel nulpunten van $P(z)$ liggen er in de ring $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}$? (5 p)

3. Beschouw de functie $f : z \to \dfrac{1}{(z-1)\sinh^3 z}$.

a. Bepaal de singulariteiten van f in het complexe vlak en hun aard. (8 p)

b. Bepaal het hoofddeel van de Laurentreeks van $f(z)$ rond $z = 0$. (7 p)

c. Geef een zo groot mogelijk gebied aan waarop de in (b) genoemde Laurentreeks convergeert. (3 p)

d. Bereken de integraal $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)dz$. (8 p)

4a. Los het volgende beginwaardenprobleem op m.b.v. Laplacetransformatie:

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-2x} \quad (x > 0) \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases} . \qquad (12\text{p})$$

b. Bepaal m.b.v. Fouriertransformatie de oplossing van

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = f(x), \quad y(x) \to 0 \quad \text{als} \quad x \to \pm\infty \qquad (x \in \mathbf{R})$$

Hierbij is f een op $\mathbf{R}$ continue functie zo, dat $f(x) \to 0$ als $|x| \to \infty$. Schrijf de oplossing in de vorm van een integraal. (16 p)

Tentamen Analyse 4 van 29-5-06. Antwoorden.

1. Integreer $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2-4z+5}$ over het segment $\gamma_1 = [-R, R]$ en de halve cirkel γ_2 met straal R en middelpunt $z = 0$ in het bovenhalfvlak. Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$: De singulariteiten van $f(z)$ zijn $z = 2 \pm i$, beide polen van orde 1, alleen $z = 2 + i$ ligt binnen γ.

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=2+i} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2+i}(z-2-i)f(z) = \pi(2+i)e^{2i-1}.$$

Anderzijds gaat $f(z)$ naar 0 als $|z| \to \infty$, dus volgens het lemma van Jordan gaat $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)dz$ naar nul als $R \to \infty$. Dus geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-4x+5}dx = \mathrm{Im} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz = \mathrm{Im} \oint_{\gamma} f(z)dz = \pi e^{-1}(2\sin 2 + \cos 2).$$

2. Voor $|z| = 2$ is $|z|^6 = 32 > |z|^4 + |6z| + 1 \geq |z^4 - 6z + 1|$ dus volgens de stelling van Rouché heeft $P(z)$ evenveel nulpunten met $|z| < 2$ als z^6, dus zes. Omdat P een polynoom is van graad 6 heeft $P(z)$ precies 6 nulpunten en dus liggen alle nulpunten van P binnen de cirkel $\{|z| = 2\}$.
Voor $|z| = 1$ is $|6z| = 6 > |z|^6 + |z|^4 + 1 \geq |z^6 - z^4 - 1|$, dus $P(z)$ heeft voor $|z| < 1$ evenveel nulpunten als $6z$, dus 1. Op $|z| = 1$ en $|z| = 2$ liggen geen nulpunten van $P(z)$ dus voor $1 < |z| < 2$ zijn er 6-1=5 nulpunten.

3a. De singulariteiten zijn de nulpunten van de noemer, dus het zijn alle polen. $z = 1$ is een pool van orde 1, aangezien $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \sinh^{-3} 1 \neq 0$. Verder heeft $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$ nulpunten van orde 1 voor $z = ik\pi$ (k geheel) (immers $\cosh(k\pi) \neq 0$), dus $z = k\pi$ zijn polen van orde 3 van f.

b. $\sinh z = z + z^3/6 + O(z^5)$, dus

$$\sinh^{-3} z = z^{-3}(1+z^2/6+O(z^4))^{-3} = z^{-3}(1+z^2/2+O(z^4))^{-1} = z^{-3}(1-z^2/2+O(z^4)).$$

Dus is

$$f(z) = -z^{-3}(1-z)^{-1}(1-z^2/2+O(z^4)) = -z^{-3}(1+z+z^2+O(z^3))(1-z^2/2+O(z^4)) =$$

$$= -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + O(1) \quad (z \to 0)$$

c. De Laurentreeks convergeert voor $0 < |z| < r$ waarbij r de afstand van $z = 0$ tot de dichtstbijzijnde singulariteit van f is. Dus $r = 1$.

d. Binnen $|z| = 2$ liggen de singulariteiten $z = 0$ en $z = 1$ van f. Het residu van f in $z = 0$ is $-1/2$ volgens (b) en in $z = 1$ is het residu gelijk aan $\sinh^{-3} 1$ (vergelijk onderdeel a). Dus geldt

$$\oint_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=0} f(z) + 2\pi i \mathrm{Res}_{z=1} f(z) = -\pi i + 2\pi i \sinh^{-3} 1.$$

4a. Laat $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$ de Laplacegetransformeerde van $y(x)$ zijn. Dan geldt: $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$ en $\mathcal{L}(y'')(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1$. Verder is $\mathcal{L}(e^{-2x}) = (s+2)^{-1}$. Laplacetransformatie van de diff.vergelijking geeft dus $(s^2 + 4s + 4)Y(s) = 1 + (s+2)^{-1}$ en dus is $Y(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2} + \dfrac{1}{(s+2)^3}$. Inverse Laplacetransformatie geeft meteen (m.b.v. de rekenregels):

$$y(x) = xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}.$$

b. We nemen aan dat de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(\omega) = U$ van $y(x)$ bestaat. Nu is $\mathcal{F}(y') = i\omega U$ en $\mathcal{F}(y'') = -\omega^2 U$. Laat verder $\mathcal{F}(f) = F$. Dan geldt $(-\omega^2 + 4i\omega + 4)U(\omega) = F(\omega)$ en dus is $U(\omega) = \dfrac{-F(\omega)}{(\omega - 2i)^2}$. Nu is volgens de omkeerformule

$$\mathcal{F}^{-1}((\omega - 2i)^{-2}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\omega}}{(\omega - 2i)^2} d\omega.$$

De integraal berekenen we m.b.v. contourintegratie en het lemma van Jordan. Voor $x < 0$ integeren we $g(z) = \frac{e^{ixz}}{(z-2i)^2}$ over de contour $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ met γ_R de halve cirkel met straal R en middelpunt $z = 0$ in het benedenhalfvlak (en met een kloksgewijze oriëntatie). Volgens het lemma van Jordan gaat de integraal van $g(z)$ over γ_R naar 0 en dus is $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\omega}}{(\omega - 2i)^2} d\omega = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} g(z)dz = 0$. Voor $x > 0$ integreren we $g(z)$ over $\Gamma'_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ met γ_R de halve cirkel met straal R en middelpunt $z = 0$ in het bovenhalfvlak. Nu geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\omega}}{(\omega - 2i)^2} d\omega = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma'_R} g(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=2i}\, g(z) =$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}_{w=0} \frac{e^{ixw}}{w^2} e^{-2x} = -2\pi x e^{-2x}.$$

Dus $\mathcal{F}^{-1}((\omega - 2i)^{-2}) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x > 0 \\ -xe^{-2x} & \text{voor } x > 0. \end{cases}$ (Merk op dat de functie in het rechterlid aan de voorwaarden van de omkeerstelling voldoet.)
De oplossing is nu

$$y(x) = f * \mathcal{F}^{-1}(-(\omega - 2i)^{-2})(x) = \int_0^{\infty} te^{-2t} f(x-t)dt.$$