Tentamen Besliskunde 1 (17 juni 2004, 10.00-13.00 uur)

Opgave 1

Laat de gerichte graaf G een toernooi zijn. Toon hiervoor de volgende beweringen aan:

a. Door maximaal één pijl van richting te veranderen is van G een streng samenhangende graaf te maken.

b. Als v_1 een knooppunt is waaruit alle andere knooppunten bereikbaar zijn, dan heeft G een in v_1 beginnend Hamilton pad.

Opgave 2

Bewijs dat voor de Fibonacci-getallen geldt:

a. $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$ voor alle n en m.

b. $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots.$

Opgave 3

a. Los het volgende LP-probleem op:

$$max \left\{ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq 4; & x_1 \geq 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 1; & x_2 \geq 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq 2; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan een optimale oplossing.

c. Veronderstel dat een variabele $x_4 \geq 0$ wordt toegevoegd met in de doelfunctie de coëfficiënt -1, en in de drie beperkingen de coëfficiënten -2, 0 en 1, respectievelijk.
Is het eindtableau uit onderdeel a, na toevoeging van de kolom behorende bij x_4 nog steeds optimaal? Beantwoord dit onderdeel zonder het nieuwe probleem van vooraf aan op te lossen, maar door m.b.v. het optimale tableau uit onderdeel a B^{-1} op te stellen en hiermee de overige benodigde gegevens te bepalen.

Opgave 4

Beantwoord de volgende vragen voor $E = \{1, 2, 3, 4\}$ en $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.
Onderbouw uw antwoorden met argumenten.

a. Is $(E, \mathcal{B})$ een matroïde?

b. Is $(E, \mathcal{B})$ een graafmatroïde?

c. Is $(E, \mathcal{B})$ een cograafmatroïde?

d. Is $(E, \mathcal{B})$ een binaire matroïde?

e. Is $(E, \mathcal{B})$ een transversaal matroïde?

Opgave 5

Beschouw onderstaande overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a. Bepaal de recurrente klassen en schrijf de matrix in standaardvorm.

b. Bepaal vanuit toestand 2 voor alle j de absorptiekansen f_{2j}.

c. Bepaal op de klasse C waar toestand 1 toe behoort de eerste doorkomsttijden μ_{i1}, $i \in C$.

Opgave 6

Beschouw iemand die in het donker onder de grond zit in een ruimte met drie openingen. Opening 1 brengt hem in vrijheid na een reis van twee dagen; opening twee brengt hem na een reis van vier dagen weer terug in dezelfde ruimte en opening drie brengt hem na een reis van zes dagen weer terug in dezelfde ruimte.

Veronderstel dat hij altijd met kans $\frac{1}{3}$ een van de openingen kiest, en laat T de stochastischetijd zijn voordat hij vrijkomt.

a. Definieer een rij onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen $X_1, X_2, \ldots$ en een stoptijd τ zdd. $T = \sum_{i=1}^{\tau} X_i$.

b. Bepaal $\mathbb{E}\{T\}$ met de vergelijking van Wald.

c. Bereken $\mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{\tau} X_i \mid \tau = n\}$ en laat zien dat dit niet hetzelfde is als $\mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{n} X_i\}$.

Puntenwaardering

Het aantal te behalen punten voor de diverse onderdelen is als volgt:

opgave 1a	:	4 punten;	opgave 1b	:	6 punten.			
opgave 2a	:	4 punten;	opgave 2b	:	6 punten.			
opgave 3a	:	8 punten;	opgave 3b	:	4 punten;	opgave 3c	:	8 punten.
opgave 5a	:	8 punten;	opgave 5b	:	8 punten;	opgave 5c	:	4 punten.
opgave 6a	:	8 punten;	opgave 6b	:	6 punten;	opgave 6c	:	6 punten.

Alle onderdelen van opgave 4: 4 punten.