Tentamen Besliskunde 1 (10 augustus 2004, 10.00-13.00 uur)

Opgave 1

a. Bewijs dat een normale graaf een Hamilton kring heeft als $m \geq \frac{n^2-3n+6}{2}$.

b. Zij $G = (V, E)$ een normale graaf met $d(v)+d(w) \geq n-1$ voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten $v, w \in V$. Bewijs dat G een Hamilton keten bevat.

Opgave 2

Los de volgende recurrente betrekking op met de methode van voortbrengende functies:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}, \ n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Opgave 3

a. Los het volgende LP-probleem op:

$$max \left\{ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq 6; x_1 \geq 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & \leq 4; x_2 \geq 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1; x_3 \text{ vrij} \end{array} \right\}$$

b. Stel het duale LP-probleem op en geef ook daarvan de optimale ooplossing.

c. Is de oplossing van het LP-probleem uniek?
Zo ja, waarom; zo nee, geef dan alle optimale oplossingen.

Opgave 4

Beschouw de graafmatroide $(E, \mathcal{B})$ van een graaf G. Toon het volgende aan:

a. $(E, \mathcal{B})$ is een bipartiete matroide d.e.s.d. als G een bipartiete graaf is.

b. $(E, \mathcal{B})$ is een Euler matroide d.e.s.d. als G een Euler graaf is.

Opgave 5

Beschouw een Markov keten op de toestandsruimte $\{1, 2\}$ en met als overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

a. Bepaal de stationaire verdeling.

b. Bepaal de kansverdeling van de eerste doorkomst in toestand 1.

c. Bereken met de in onderdeel b verkregen getallen μ_{11} (gebruik dat $\mu_{11} = \sum_{t=1}^{\infty} t f_{11}^{(t)}$).

Opgave 6

Toon voor het Poisson proces met parameter λ het volgende aan:

a. Voor de verdelingsfunctie $F_n(t)$ van S_n geldt: $F_n(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $n = 1, 2, \ldots$.

b. De dichtheid $f_n(t)$ van S_n voldoet aan: $f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $n = 1, 2, \ldots$.

c. De Laplace getransformeerde $F_n^*(s)$ van de verdelingsfunctie $F_n(t)$ van S_n voldoet aan:

$F_n^*(s) = (\frac{\lambda}{\lambda+s})^n$ (hierbij mag gebruikt worden dat $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$).

Puntenwaardering

Het aantal te behalen punten voor de diverse onderdelen is als volgt:

opgave 1a	:	5 punten;	opgave 1b	:	5 punten.			
opgave 2	:	20 punten.						
opgave 3a	:	12 punten;	opgave 3b	:	4 punten;	opgave 3c	:	4 punten.
opgave 4a	:	5 punten;	opgave 4b	:	5 punten.			
opgave 5a	:	5 punten;	opgave 5b	:	5 punten;	opgave 5c	:	10 punten.
opgave 6a	:	6 punten;	opgave 6b	:	6 punten;	opgave 6c	:	8 punten.