Tentamen Besliskunde 1 (1 april 2005, 10.00-13.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1

Bewijs de Max-min stelling van König-Egerváry:

> *Zij A een (0,1)-matrix met m rijen en n kolommen. Het maximale aantal onafhankelijk 1'en is gelijk aan het minimale aantal rijen en kolommen die tezamen alle 1'en bevatten.*

Opgave 2

Bewijs de Stelling van het scheidende hypervlak:

> *Zij $C \in \mathbb{R}^n$ een gesloten convexe verzameling en $x \notin C$.*
> *Dan is er een scheidend hypervlak, d.w.z. er bestaan reële getallen $a_0, a_1, \dots, a_n$ zdd.*
> $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > a_0$ *en* $a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n < a_0$ *voor alle* $y \in C$.

Opgave 3

Bewijs dat m.b.v. het gretige algoritme het begrip matroïde kan worden gedefinieerd, d.w.z.:

> *Zij $\mathcal{I}$ een collectie deelverz. van E met de eigenschappen:*
> *(i) iedere deelverz. van een verz. uit $\mathcal{I}$ is een element van $\mathcal{I}$;*
> *(ii) voor iedere niet-negatieve gewichtsfunctie geldt dat een lexicografisch maximale verzameling een maximaal totaal gewicht heeft.*
> *Dan geldt dat (E,I) een matroïde is.*

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

Bewijs dat voor de Fibonacci-getallen geldt:

$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1},\ n = 1, 2, \ldots.$

Opgave 5

Beschouw het volgende LP-probleem:

$$max \left\{ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4; \quad x_1 \geq 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 2; \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

a. Bepaal een optimale oplossing met de simplex methode.

b. Stel het duale probleem op en geef ook daarvan de optimale oplossing.

Opgave 6

Een spel met 52 kaarten wordt geschut en de kaarten worden één voor één open neergelegd. Laat $X_n = 1$ als de n-de kaart een aas is en anders is $X_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots, 52$, d.w.z. dat $\mathbb{E}\{X_n\} = \frac{1}{13}$ voor alle n. Laat τ het aantal kaarten zijn dat geopend moet worden om alle azen te tonen: de vierde aas verschijnt als τ-de kaart.

Laat zien dat $\mathbb{E}\left\{\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right\} \neq \mathbb{E}\{\tau\} \cdot \mathbb{E}\{X_n\}$. Wat is hiervoor de reden?