Tentamen Besliskunde 1 (21 januari 2005, 10.00-13.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1

Zij $G = (V, E)$ een normale graaf met n knooppunten. De graad van een knooppunt x wordt genoteerd met $d(x)$. Bewijs de volgende bewering:

Als $d(v) + d(w) \geq n$ voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten $v, w \in V$, dan heeft G een Hamilton kring.

Opgave 2

Beschouw een LP-probleem in de vorm waarin, door toevoeging van verschilvariabelen, de m beperkingen gelijkheden zijn en de matrix rang m heeft. In het dictaat was de notatie voor het bijbehorende toegelaten gebied in deze formulering: $\overline{R} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \overline{A}\overline{x} = b; \overline{x} \geq 0\}$.
Laat $\overline{a}_{\bullet k}$, $k = 1, 2, \ldots, n+m$ de kolomvectoren van de matrix $\overline{A}$ zijn. Verder definiëren we $J(\overline{x}) = \{j \mid \overline{x}_j > 0\}$.
Bewijs de volgende bewering:

Laat $\overline{x} \in \overline{R}$. Dan geldt: $\overline{x}$ is een hoekpunt d.e.s.d. als $\{\overline{a}_{\bullet k} \mid k \in J(\overline{x})\}$ een verz. van lineair onafhankelijke vectoren is.

Opgave 3

Zij x een stationaire kansverdeling van de Markov keten met overgangsmatrix P.
Laat $R_1, R_2, \ldots, R_m$ de recurrente klassen zijn, T de verz. van de transiënte toestanden en noteer de stationaire matrix met P^*.
Bewijs de volgende bewering:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \textit{als} \;\; i \in T \\ c_k p^*_{ii} & \textit{als} \;\; i \in R_k, \;\; \textit{met} \; c_k \geq 0, 1 \leq k \leq m, \textit{en} \; \sum_{k=1}^{m} \; c_k = 1. \end{cases}$$

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

Zij a_n het aantal getallen van n cijfers uit $1, 2, 3, 4, 5$ dat deelbaar is door 3.

a. Toon aan dat a_n voldoet aan de recurrente betrekking $\begin{cases} a_n + a_{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}, \ n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

b. Bepaal a_n.

Opgave 5

a. Bepaal met de simplex methode een optimale oplossing van:

$$max \left\{ 8x_1 - 3x_2 - 2x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 5; \quad x_1 \geq 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 7; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 4; \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

c. Is de oplossing van het oorsponkelijke probleem uniek?
En de oplossing van het duale probleem?

Opgave 6

Beschouw de Markov keten op $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ met de volgende overgangskansen:

$p_{00} = p_{NN} = 1; \ p_{ij} = \begin{cases} p & \text{als } j = 0 \\ q & \text{als } j = i \\ r & \text{als } j = i + 1 \end{cases}$ voor $i = 1, 2, \ldots, N - 1$, waarbij $p, q, r \in (0, 1)$ en met $p + q + r = 1$.

Bepaal f_{i0} en f_{iN} voor alle i.