Tentamen Besliskunde 1 (31 maart 2006, 10.00-13.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1

Zij A een (0,1)-matrix met m rijen en n kolommen. Elementen van A heten onafhankelijk indien ze in verschillende rijen en kolommen liggen. Bewijs het volgende:

Het maximale aantal onafhankelijke 1'en is gelijk aan het minimale aantal rijen en kolommen die tezamen alle 1'en bevatten.

Opgave 2

Zij $C \in \mathbb{R}^n$ een gesloten convexe verzameling en $x \notin C$. Bewijs de volgende bewering:

Er is een scheidend hypervlak, d.w.z. er bestaan reële getallen $a_0, a_1, \dots, a_n$ zdd.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > a_0$ *en* $a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n < a_0$ *voor alle* $y \in C$.

Opgave 3

Zij x een stationaire kansverdeling van de Markov keten met overgangsmatrix P.
Laat $R_1, R_2, \dots, R_m$ de recurrente klassen zijn, T de verz. van de transiënte toestanden en noteer de stationaire matrix met P^*.
Bewijs de volgende bewering:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \textit{als} \ \ i \in T \\ c_k p^*_{ii} & \textit{als} \ \ i \in R_k, \ \textit{met} \ c_k \geq 0, 1 \leq k \leq m, \textit{en} \ \sum_{k=1}^m \ c_k = 1. \end{cases}$$

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

a. Bewijs dat een normale graaf een Hamilton kring heeft als $m \geq \frac{n^2-3n+6}{2}$.

b. Zij $G = (V, E)$ een normale graaf met $d(v)+d(w) \geq n-1$ voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten $v, w \in V$. Bewijs dat G een Hamilton keten bevat.

Opgave 5

Los de volgende recurrente betrekking op met de methode van voortbrengende functies:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3^{n-1},\ n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Opgave 6

a. Los met de simplex methode het volgende probleem op:

$$max \left\{ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8; \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8; \end{array} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$$

b. Voer de gevoeligheidsanalyse uit op:

- de coëfficiënten van x_1 en x_2 uit de doelfunctie;
- de beide coëfficiënten van het rechterlid.