Herkansingstentamen Besliskunde 1

1 februari 2007, 10.00-13.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1

DFS (Depth-First Search) in een niet-gerichte graaf $G = (V, E)$ verdeelt de takkenverz. E in pijlenverz. F en B. Toon aan dat geldt:

1. De pijlen van F vormen een opspannend gericht bos met als wortels de knooppunten v met $pred[v] = 0$.
2. De met F geassocieerde kringen zijn rondes, d.w.z. de enige pijl van B in zo'n kring loopt 'de goede kant' op.
3. Iedere enkelvoudige ronde in de door DFS gerichte graaf is een met F geassocieerde kring.

Opgave 2

Beschouw de 2e-orde recurrente betrekking met constante coëfficiënten:

$$\begin{cases} a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2},\ n = 3, 4, \ldots \\ a_1,\ a_2 \text{ gegeven randvoorwaarden,} \end{cases} \tag{1}$$

waarin A en B constanten zijn die niet van n afhangen en $B \neq 0$.

Bewijs de volgende twee beweringen:

1. Als de wortels α, β van de vergelijking $x^2 = Ax + B$ verschillend zijn, dan is

$$a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n,\ n \geq 1, \tag{2}$$

   met constanten K_1 en K_2 die eenduidig bepaald zijn door a_1 en a_2.
2. Als de vergelijking $x^2 = Ax + B$ een tweevoudige wortel α heeft, dan is

Deel 2: Opgaven

Opgave 4

Vijf heren (Albert, Bernard, Cees, Dick en Emile) en vijf dames (Fien, Gertie, Henrike, Ingelise en Josine) hebben ingeschreven voor een tennistoernooi. Dit toernooi is een gemengd-dubbel toernooi, d.w.z. dat iedere heer met één van de dames een combinatie vormt. De dames mochten ten hoogste twee heren opgeven met wie ze niet wensten te spelen.

Deze wensen zijn als volgt: Fien wil niet spelen met Albert of Emile, Gertie niet met Cees of Dick, Henrike niet met Albert of Emile, Ingelise niet met Bernard en Josine niet met Cees.

a. Op hoeveel verschillende manieren kunnen er 5 combinaties worden gevormd, waarbij rekening wordt gehouden met de wensen der dames?

b. Neem aan dat door loting de 5 combinaties worden gevormd. Hierbij heeft ieder van de toegestane mogelijkheden een gelijke kans om geloot te worden. Wat is de kans dat Albert en Josine een combinatie vormen?

Opgave 5

Beschouw het volgende LP-probleem

$$max \left\{ x_1 - 2x_2 - x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2; & x_1 \geq 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & \leq & 1; & x_2 \geq 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & \geq & 0; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

a. Bepaal een optimale oplossing met de simplex methode.

b. Stel het duale probleem op en geef ook daarvan de optimale oplossing.

Opgave 6

Beschouw een Markov keten met $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$ die de volgende overgangsmatrix heeft, waarbij $\alpha_i \geq 0$ voor alle i en $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6 = 1$):

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix}.$$